Vollständige Klassifikation der Quanten-Transfermatrix-Eigenzustände von endlichen Gittersystemen mit SU(n,m)-Symmetrie

Jens Damerau

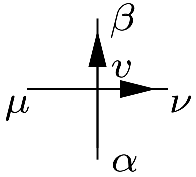
jens.damerau@uni-dortmund.de

Universität Dortmund und Bergische Universität Wuppertal

Übersicht

1. Grundlagen
   - Integrable Modelle
   - Yang-Baxter-Algebra und Bethe-Ansatz
   - Symmetriegruppe SU(n,m)
2. Uimin-Sutherland-Modell
   - Quanten-Transfermatrix-Zugang
   - Bethe-Ansatzgleichungen
3. Numerische Lösung der Bethe-Ansatzgleichungen
   - Newton-Verfahren
   - Diagonalisierung der Quanten-Transfermatrix
   - Bestimmung von Bethe-Ansatz-Zahlen zu bekannten Eigenzuständen
4. Ergebnisse
   - Klassifikation der Eigenwerte und -zustände
   - Thermodynamik bei endlicher Temperatur

Integrable Modelle

- Eindimensionale quantenmechanische Modelle $\rightarrow$ Spinketten
- Integrabilität verknüpft mit Algebra; hier: Yang-Baxter-Algebra
- Kann quantenmechanische Modelle der Dimension d abbilden auf klassische Gittermodelle der Dimension $d+1$ (Suzuki 76)
- Zweidimensionale Vertex-Modelle:
  $(N \times M)$-Gitter mit Vertex-Gewichten $R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(v) =$ 

- Monodromiematrix $\mathcal{L}^{\nu'}_{\nu}(v) := \sum_{\{\mu\}} R^{\nu\mu_2}_{\alpha_1\beta_1} R^{\mu_2\mu_3}_{\alpha_2\beta_2} \cdots R^{\mu_N\nu'}_{\alpha_N\beta_N}$
- Transfermatrix $\mathcal{T}(v) := \mathrm{Tr}_{\text{aux}}\, \mathcal{L}(v) = \sum_{\nu} \mathcal{L}^{\nu}_{\nu}(v)$
- Zustandssumme:

$$Z = \mathrm{Tr}\, \mathcal{T}^{M}(v)$$

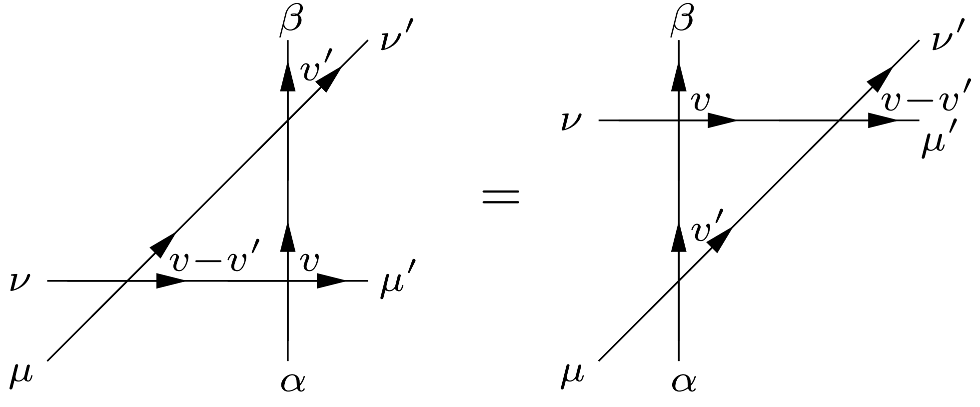
Yang-Baxter-Algebra

- Definition über die Monodromiematrix:

$$\sum_{\rho,\sigma} \mathcal{L}_{\rho}^{\nu'}(v')\mathcal{L}_{\sigma}^{\mu'}(v)R_{\mu\rho}^{\nu\sigma}(v-v') = \sum_{\rho,\sigma} R_{\rho\nu'}^{\sigma\mu'}(v-v')\mathcal{L}_{\nu}^{\sigma}(v)\mathcal{L}_{\mu}^{\rho}(v')$$

- Garantiert Vertauschungsrelation $[\mathcal{T}(v), \mathcal{T}(v')] = 0$
- R-Matrizen müssen Yang-Baxter-Gleichung erfüllen:

$$\sum_{\rho,\sigma} R_{\tau\beta}^{\rho\nu'}(v')R_{\alpha\tau}^{\sigma\mu'}(v)R_{\mu\rho}^{\nu\sigma}(v-v') = \sum_{\rho,\sigma} R_{\rho\nu'}^{\sigma\mu'}(v-v')R_{\tau\beta}^{\nu\sigma}(v)R_{\alpha\tau}^{\mu\rho}(v')$$



Algebraischer Bethe-Ansatz

Ziel: Diagonalisierung der Transfer-Matrix $\mathcal{T}(v)$

- Voraussetzung ist bekannter Referenzeigenzustand
- Nebendiagonaleinträge der Monodromiematrix $\mathcal{L}_1^2(v)$, $\mathcal{L}_2^1(v)$ als Erzeuger bzw. Vernichter (bei $q = 2$);
  $q > 2$: „geschachtelter“ BA (Yang 67)
- „Unwanted terms“ verschwinden dabei, falls nichtlineares Gleichungssystem, sog. *Bethe-Ansatzgleichungen*, gelöst
- Geschlossene Darstellung der Eigenzustände und Eigenwerte mit Hilfe von Bethe-Ansatzzahlen möglich

Symmetriegruppe SU(n,m)

Zunächst SU(n):

- Unitäre $(n \times n)$-Matrizen A mit $\det A = 1$
- Generatoren der Algebra: hermitesche Matrizen a mit $\mathrm{Tr}\, a = 0$
- Dimension der Algebra $d = n^2 - 1$

Erweiterung SU(n,m):

- Generatoren der Algebra: hermitesche Matrizen a mit $\mathrm{sTr}\, a = 0$
- Graduierter Vektorraum $V = V_0 \oplus V_1$ („gerade“ & „ungerade“)

$$\mathrm{sTr}\, A := \sum_\alpha (-1)^{p(\alpha)} A^\alpha_\alpha\,; \quad [X, Y]_\pm := XY - (-1)^{p(X)p(Y)} YX$$

- Ermöglicht Behandlung von fermionischen und bosonischen Zuständen
- Graduierte YB-Algebra kann auf nichtgrad. Fall zurückgeführt werden

Uimin-Sutherland-Modell

- Generalisiertes Modell mit SU(n,m)-Symmetrie:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^{L} \pi_{i,i+1}\,; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \sum_{i=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{q} \mu_\alpha n_{i,\alpha}$$

$$\pi_{i,i+1}|\alpha_1 \dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_L\rangle = (-1)^{\xi_{\alpha_i \alpha_{i+1}}}|\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}\alpha_i \dots \alpha_L\rangle$$

$$\xi_{\alpha\beta} := p(\alpha)p(\beta)\,; \quad \epsilon_\alpha := (-1)^{p(\alpha)}$$

- Verknüpft mit 2-D klassischem Modell, *Perk-Schultz-Modell*:

$$R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(v) := \delta_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta} + v \cdot (-1)^{\xi_{\alpha\mu}} \cdot \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \mathcal{T}(v)\Big|_{v=0} \quad \text{mit } \mathcal{T}^{\beta}_{\alpha}(v) := \sum_{\{\mu\}} \prod_{i=1}^{L} R^{\mu_i \mu_{i+1}}_{\alpha_i \beta_i}(v)$$

$[\mathcal{T}(v), \mathcal{H}_0] = 0$ für alle $v \in \mathbb{C}$, aus Yang-Baxter-Gleichung

Uimin-Sutherland-Modell

SU(3)-symmetrisches Modell: $(q=3\,;\quad \epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=+1)$

- SU(2)-symmetrische Spin-1-Kette
- Hamiltonoperator $\mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^{L}\left\{\mathbf{S}_j\mathbf{S}_{j+1} + (\mathbf{S}_j\mathbf{S}_{j+1})^2\right\}$

SU(2)×SU(2)-Spin-Orbital-Modell: $(q=4\,;\quad \epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=\epsilon_4=+1)$

- Kugel & Khomskii 82
- Hamiltonoperator $\mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^{L}\left(2\mathbf{S}_j\mathbf{S}_{j+1}+\frac{1}{2}\right)\left(2\boldsymbol{\tau}_j\boldsymbol{\tau}_{j+1}+\frac{1}{2}\right)$

Supersymmetrisches t-J-Modell: $(q=3\,;\quad \epsilon_1=-\epsilon_2=\epsilon_3=+1)$

- Hüpfen von Elektronen auf Gitter, keine Doppelbesetzung, supersymm. $2t=J$
- Ham.op. $\mathcal{H}_0 = -t\sum_{j,\sigma}\mathcal{P}(c^\dagger_{j,\sigma}c_{j+1,\sigma}+c^\dagger_{j+1}c_{j,\sigma})\mathcal{P} + J\sum_j(\mathbf{S}_j\mathbf{S}_{j+1}-n_jn_{j+1}/4)$

Supersymm. erweitertes Hubbard-Modell: $(q=4\,;\quad \epsilon_1=-\epsilon_2=-\epsilon_3=\epsilon_4=+1)$

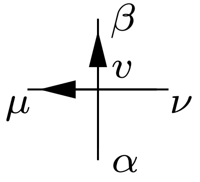
- Essler, Korepin & Schoutens 92
- Eigenschaften von t-J- und Hubbard-Modell, Doppelbesetzung möglich

Quanten-Transfermatrix-Zugang

<u>Ziel:</u> Berechnung der Zustandssumme $Z = \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-\beta \mathcal{H}_0}$

- Zusätzlich Transfermatrix aus gedrehten Vertex-Gewichten:

$$\overline{R}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(v) := R^{\alpha\beta}_{\nu\mu}(v) =$$



$$; \qquad \overline{\mathcal{T}}^{\beta}_{\alpha}(v) := \sum_{\{\mu\}} \prod_{i=1}^{L} \overline{R}^{\mu_i \mu_{i+1}}_{\alpha_i \beta_i}(v)$$

- Wiederum gilt: $\quad \mathcal{H}_0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \ln \overline{\mathcal{T}}(v) \Big|_{v=0}$

- Entwickeln um $v = 0$:

$$\ln \mathcal{T}(v) = \ln \mathcal{T}(0) + \mathcal{H}_0 \cdot v + \mathcal{O}(v^2)$$

$$\ln \overline{\mathcal{T}}(v) = \ln \overline{\mathcal{T}}(0) + \mathcal{H}_0 \cdot v + \mathcal{O}(v^2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T}(v)\overline{\mathcal{T}}(v) = \underbrace{\mathcal{T}(0)\overline{\mathcal{T}}(0)}_{\text{Shiftoperatoren}}\, \mathrm{e}^{2v\mathcal{H}_0 + \mathcal{O}(v^2)} = \mathrm{e}^{2v\mathcal{H}_0 + \mathcal{O}(v^2)}$$

Quanten-Transfermatrix-Zugang

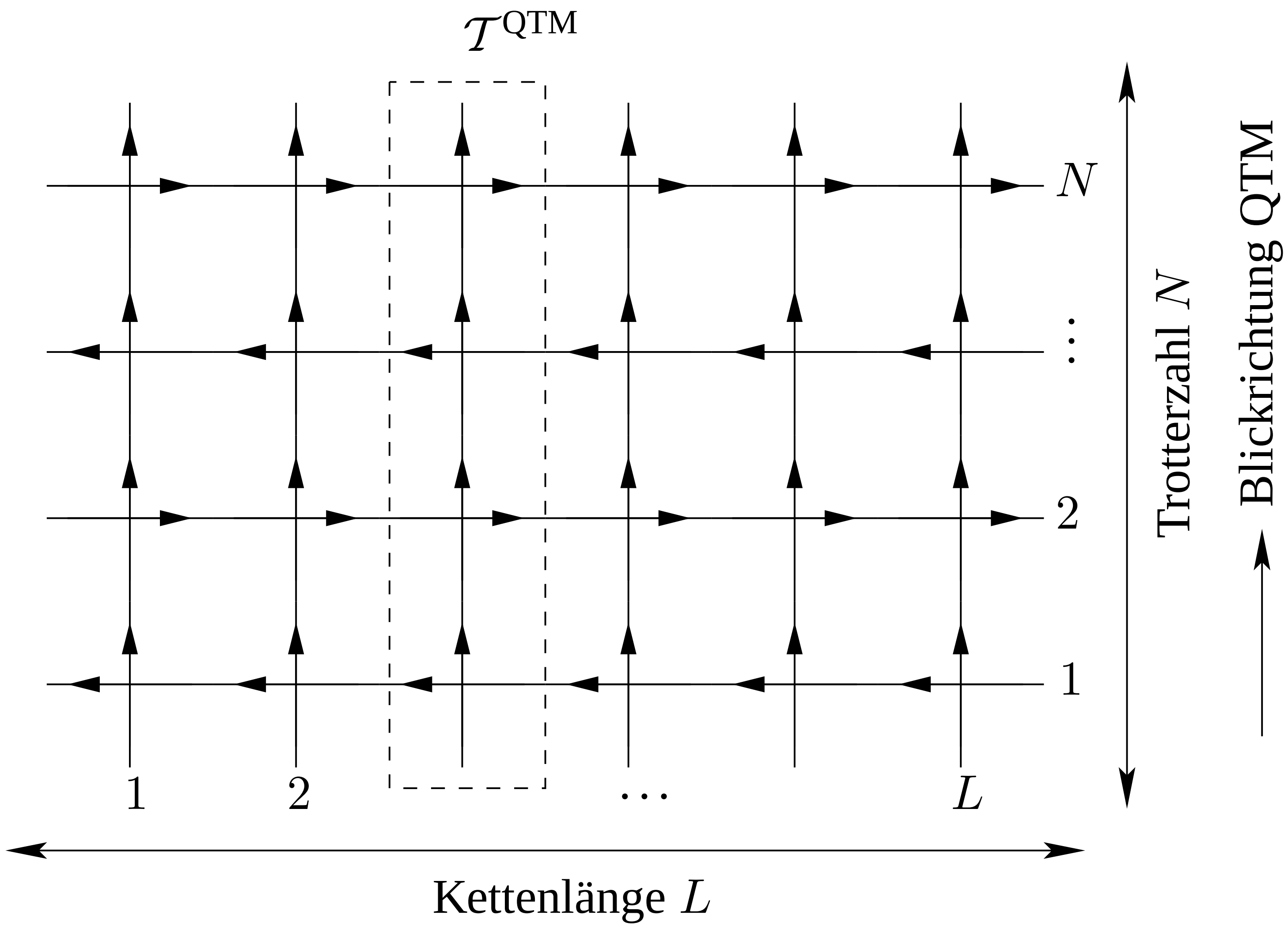
- Auswertung an $u = -\beta/N$ und Spurbildung:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{T}(u)\overline{\mathcal{T}}(u)\right)^{N/2} = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\beta}{N}\mathcal{H}_0+\mathcal{O}((\beta/N)^2)}\right)^{N/2}$$
$$= \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_0} = Z$$

- N ist Trotterzahl ($N \gg 1$ aber endlich bei numerischen Rechnungen)
- Zustandssumme des Uimin-Sutherland-Modelles entspricht derjenigen eines „gestapelten“ Perk-Schultz-Gitters ($L \times N$):

$$Z = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}_0} = \lim_{N\to\infty} Z_{L,N}\,; \quad Z_{L,N} := \mathrm{Tr}\left(\mathcal{T}(u)\overline{\mathcal{T}}(u)\right)^{N/2}$$

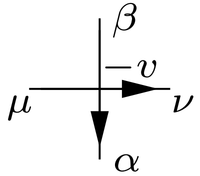
Quanten-Transfermatrix-Zugang



Quanten-Transfermatrix-Zugang

Neue Transferrichtung: *Quanten-Transfermatrix (QTM)*

$$\left(\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}\right)_{\alpha}^{\beta}(v) := \sum_{\{\mu\}} \prod_{j=1}^{N/2} R_{\alpha_{2j-1}\beta_{2j-1}}^{\mu_{2j-1}\mu_{2j}}(\mathrm{i}v+u)\widetilde{R}_{\alpha_{2j}\beta_{2j}}^{\mu_{2j}\mu_{2j+1}}(\mathrm{i}v-u)$$

- Vertexgewichte $\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(v) := R_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(-v) =$ 

- Neuer Spektralparameter v:
  $\Rightarrow$ Kommutierende Familie: $[\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(v), \mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(v')] = 0 \quad$ für $v, v' \in \mathbb{C}$
- Berechnung der Zustandssumme wie bei klassischem Gitter:

$$Z_{L,N} = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{T}(u)\overline{\mathcal{T}}(u)\right)^{N/2} = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(0)\right)^{L}$$

- QTM bei $v = 0$ reell, jedoch nicht symmetrisch
- Yang-Baxter-Algebra und SU(n,m)-Symmetrie

Quanten-Transfermatrix-Zugang

- Thermodynamik allein bestimmt durch den größten Eigenwert der QTM:

$$f = -\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L\beta} \ln Z = -\lim_{L\to\infty} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{L\beta} \ln \mathrm{Tr} \left(\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(0)\right)^L$$
$$= -\frac{1}{\beta} \lim_{N\to\infty} \ln \Lambda_{\mathrm{max}}(0)$$

- Fehler durch endliche Trotterzahl N: $\quad f_N \simeq f + \mathcal{O}(\beta/N)$
- Nächstführende Eigenwerte liefern Korrelationslängen: $(L \to \infty)$

$$\langle \sigma_1 \sigma_{1+r} \rangle = \lim_{N\to\infty} \left[|\langle \Psi_0 | \sigma | \Psi_0 \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{q^N-1} |\langle \Psi_0 | \sigma | \Psi_i \rangle|^2 \cdot \mathrm{e}^{-r/\xi_i} \right]$$

$$\xi_i := \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{\mathrm{max}}(0)}{\Lambda_i(0)} \right) \right]^{-1}$$

Bethe-Ansatz für QTM

- Darstellung der Eigenwerte: $\Lambda(v) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(v)$

$$\lambda_1(v) = \frac{q_1(v + \mathrm{i}\epsilon_1)}{q_1(v)} \phi_+(v)\phi_-(v - \mathrm{i}\epsilon_1)\mathrm{e}^{\beta\mu_1}$$

$$\lambda_j(v) = \frac{q_{j-1}(v - \mathrm{i}\epsilon_j)}{q_{j-1}(v)} \frac{q_j(v + \mathrm{i}\epsilon_j)}{q_j(v)} \phi_+(v)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_j} \quad \text{für } 2 \leq j \leq q-1$$

$$\lambda_q(v) = \frac{q_{q-1}(v - \mathrm{i}\epsilon_q)}{q_{q-1}(v)} \phi_+(v + \mathrm{i}\epsilon_q)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_q}$$

$$\text{mit } q_j(v) := \prod_{k_j=1}^{M_j} (v - v_{k_j}^j)\,; \quad \phi_\pm(v) := (v \pm \mathrm{i}u)^{N/2}$$

- Unbekannte Bethe-Ansatzzahlen $v_{k_j}^j$ (mit $1 \leq j \leq q-1$; $1 \leq k_j \leq M_j$)
- Bedingung: Eigenwert hängt analytisch von v ab! (tatsächlich Polynom)

Bethe-Ansatz für QTM

- Polstellen verschwinden, wenn *Bethe-Ansatz-Gleichungen* erfüllt:

$$\frac{\lambda_j(v^j_{k_j})}{\lambda_{j+1}(v^j_{k_j})} = -1 \quad \text{für } 1 \le j \le q-1;\ 1 \le k_j \le M_j$$

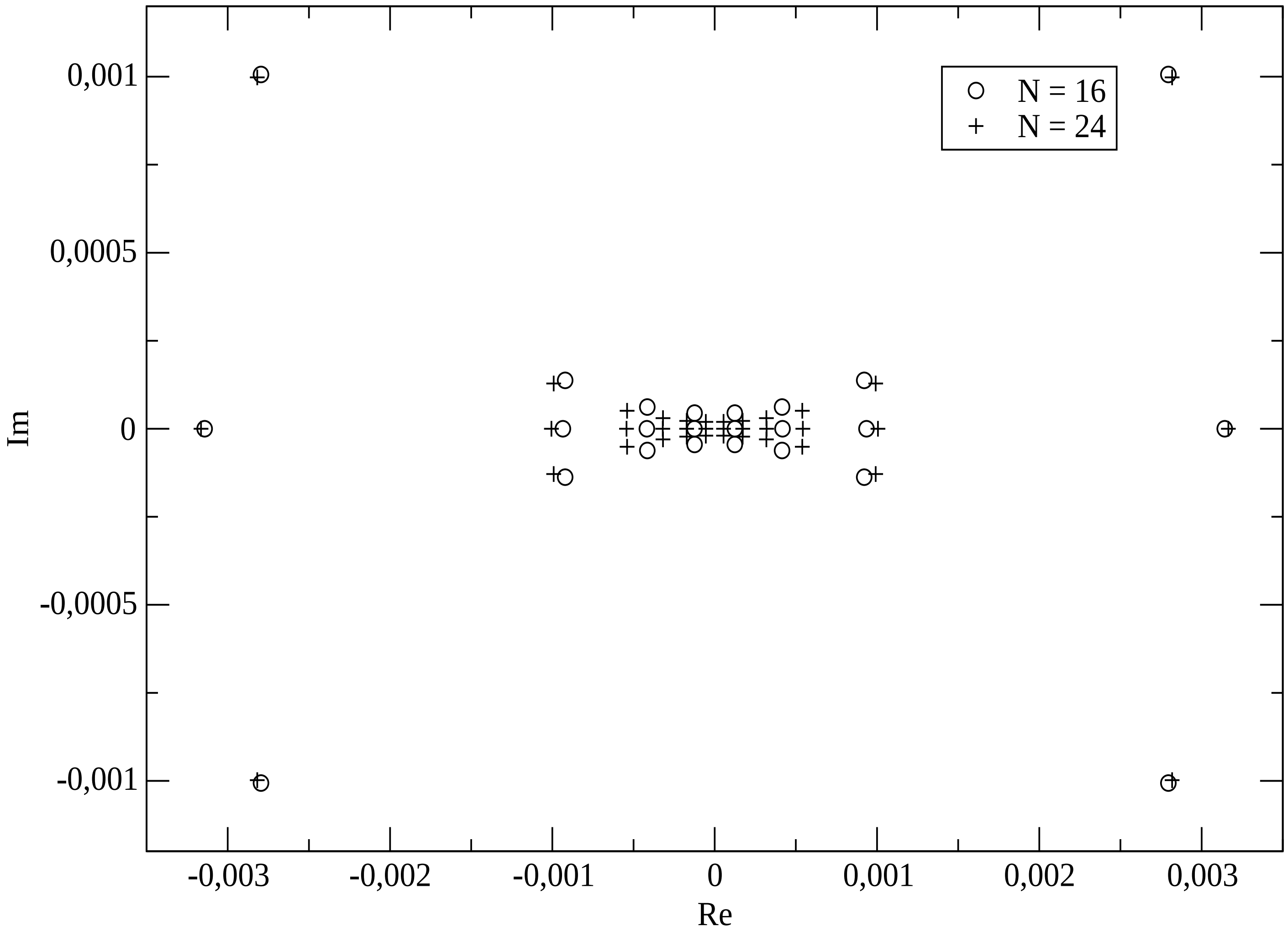
- Nichtlineares Gleichungssystem mit $M_{\text{ges}} = M_1 + \cdots + M_{q-1}$ Gleichungen und unbekannten Ansatzzahlen $v^j_{k_j}$:

$$\frac{\phi_-(v^1_{k_1} - \mathrm{i}\epsilon_1)}{\phi_-(v^1_{k_1})} \frac{q_1(v^1_{k_1} + \mathrm{i}\epsilon_1)}{q_1(v^1_{k_1} - \mathrm{i}\epsilon_2)} \frac{q_2(v^1_{k_1})}{q_2(v^1_{k_1} + \mathrm{i}\epsilon_2)} = -e^{\beta(\mu_2 - \mu_1)}$$

$$\frac{q_{j-1}(v^j_{k_j} - \mathrm{i}\epsilon_j)}{q_{j-1}(v^j_{k_j})} \frac{q_j(v^j_{k_j} + \mathrm{i}\epsilon_j)}{q_j(v^j_{k_j} - \mathrm{i}\epsilon_{j+1})} \frac{q_{j+1}(v^j_{k_j})}{q_{j+1}(v^j_{k_j} + \mathrm{i}\epsilon_{j+1})} = -e^{\beta(\mu_{j+1} - \mu_j)}$$

$$\frac{q_{q-2}(v^{q-1}_{k_{q-1}} - \mathrm{i}\epsilon_{q-1})}{q_{q-2}(v^{q-1}_{k_{q-1}})} \frac{q_{q-1}(v^{q-1}_{k_{q-1}} + \mathrm{i}\epsilon_{q-1})}{q_{q-1}(v^{q-1}_{k_{q-1}} - \mathrm{i}\epsilon_q)} \frac{\phi_+(v^{q-1}_{k_{q-1}})}{\phi_+(v^{q-1}_{k_{q-1}} + \mathrm{i}\epsilon_q)} = -e^{\beta(\mu_q - \mu_{q-1})}$$

BA-Zahlen für $q = 4$, $\beta = 0.01$, $\epsilon_j = +1$



Lösung der BA-Gleichungen

Lösung der Gleichungen mit Hilfe des *Newton-Verfahrens*:

- Bringe Gleichungssystem auf Form $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$
- Wähle geeignete Startwertverteilung $\mathbf{x}_0$
- Iterationsschritte $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

Auftretende Probleme:

- Relevante Lösungen? Welche Startwerte sind geeignet?
- Wie viele Ansatzzahlen werden benötigt? ($M_1, \ldots, M_{q-1}$)
- Konvergenz des Verfahrens? (Problematisch wegen Häufungspunkt!)

Es zeigt sich:

- Lösung für den größten EW (Thermodyn.) möglich bis ca. $N \lesssim 10000$
- Nächstführende Eigenwerte numerisch problematischer (nur $N \lesssim 200$)

Diagonalisierung der QTM

- Liefert komplettes Eigenwertspektrum und Eigenzustände
- Aber: Nur durchführbar für kleine Trotterzahl N, da $\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(v)$ von der Dimension $q^N \times q^N$ ist (bei $q = 4$ und $N = 10$ bereits $\sim 10^{12}$ Einträge)

Glücklicherweise ist Vereinfachung möglich:

- Viele Matrixeinträge verschwinden wegen Symmetrie
- Einfach auszunutzen ist zudem „erweiterte“ Gesamtspinerhaltung, $\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(v)$ vertauscht mit Operator

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{q} \sigma(\alpha) \sum_{j=1}^{N/2} (n_{2j-1,\alpha} - n_{2j,\alpha})$$

- Fast alle interessanten Eigenwerte besitzen Eigenzustände mit $\sigma|\Psi\rangle = 0$
- Diagon. durchführbar für $q = 3$ bis $N = 12$ und für $q = 4$ bis $N = 10$

Bestimmung von $\Lambda(v)$

Eigenwerte $\Lambda(v)$ in Abhängigkeit des Spektralparameters stets Polynome vom Grad N:

$$\Lambda(v) = \sum_{j=0}^{N} \Lambda_j v^j$$

Ziel: Bestimmung der Koeffizienten Λ_j

$\Rightarrow$ Mindestens $N+1$ Stützpunkte zu verschiedenen v nötig

- Diagonalisierung der QTM nur bei *einem* festen v durchführen, da alle $\mathcal{T}^{\mathrm{QTM}}(v)$ vertauschen $\Rightarrow$ Eigenzustände $|\Psi_i\rangle$ unabhängig von v
- Restliche Eigenwerte erhält man aus Multiplikation der QTMs zu anderen Spektralparametern mit jeweils bekanntem Eigenvektor $|\Psi_i\rangle$
- Kenntnis von $\Lambda(v)$ kann genutzt werden, um zu jedem Eigenwert zugehörige Bethe-Ansatzzahlverteilung eindeutig zu bestimmen

Bethe-Ansatzzahlen für $q = 3$

Speziell für $q = 3$:

$$\begin{aligned}\Lambda(v) = & \frac{q_1(v + \mathrm{i}\epsilon_1)}{q_1(v)} \phi_+(v)\phi_-(v - \mathrm{i}\epsilon_1)\mathrm{e}^{\beta\mu_1} \\ & + \frac{q_1(v - \mathrm{i}\epsilon_2)}{q_1(v)} \frac{q_2(v + \mathrm{i}\epsilon_2)}{q_2(v)} \phi_+(v)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_2} \\ & + \frac{q_2(v - \mathrm{i}\epsilon_3)}{q_2(v)} \phi_+(v + \mathrm{i}\epsilon_3)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_3}\end{aligned}$$

- Problem:
  Berechnung der Polynome $q_{1,2}(v)$ bei Kenntnis von $\Lambda(v)$
  (Multiplikation beider Seiten mit $q_1(v)q_2(v)$ führt auf nichtlineares Gleichungssystem)

Bethe-Ansatzzahlen für $q = 3$

Ausweg:

- Nur mit $q_1(v)$ multiplizieren
- Analytizität der rechten Seite trotzdem sichergestellt

$$
\begin{aligned}
q_1(v)\Lambda(v) - q_1(v + \mathrm{i}\epsilon_1)\phi_+(v)\phi_-(v - \mathrm{i}\epsilon_1)\mathrm{e}^{\beta\mu_1} \\
= \phi_-(v) \times \left\{\text{Polynom in } v\right\} =: f_1(v)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Linke Seite besitzt Nullstelle vom Grad $N/2$ bei $v_0 = \mathrm{i}u$

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung um v_0 liefert keinen Beitrag bis Grad $N/2 - 1$

$$
f_1(v_0) = 0\,; \quad \frac{\partial^k f_1}{\partial v^k}(v_0) = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, N/2 - 1
$$

Bethe-Ansatzzahlen für $q = 3$

- Schreibe $q_1(v)$ als Potenzreihe: $\quad q_1(v) = \sum_{j=0}^{M_1} a_j v^j\,, \quad (a_{M_1} := 1)$

$$\Rightarrow \qquad f_1(v) = \sum_{j=0}^{M_1} a_j \underbrace{\left(v^j \Lambda(v) - (v + \mathrm{i}\epsilon_1)^j \phi_+(v)\phi_-(v - \mathrm{i}\epsilon_1)\mathrm{e}^{\beta\mu_1}\right)}_{=: g_{a_j}}$$

$$\sum_{j=0}^{M_1} a_j g_{a_j}(v_0) = 0\,; \quad \sum_{j=0}^{M_1} a_j \frac{\partial^k g_{a_j}}{\partial v^k}(v_0) = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, N/2 - 1$$

- Lineares Gleichungssystem mit $N/2$ Gleichungen für unbekannte Koeffizienten a_j mit $j = 0, \ldots, M_1 - 1\,;$ ($g_{a_j}(v)$ bekannt)
- Lösbarkeit auch für $M_1 < N/2$ sichergestellt
- Polynom $q_1(v)$ kann eindeutig bestimmt werden
- Nullstellen von $q_1(v)$ sind gesuchte Bethe-Ansatzzahlen $v^1_{k_1}$

Bethe-Ansatzzahlen für $q = 3$

- Analoge Rechnung für $q_2(v)$ möglich, mit Hilfe von:

$$q_2(v)\Lambda(v) - q_2(v - \mathrm{i}\epsilon_3)\phi_+(v + \mathrm{i}\epsilon_3)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_3}$$
$$= \phi_+(v) \times \left\{\text{Polynom in } v\right\} =: f_2(v)$$

- Generalisierung für Modelle mit $q > 3$ ebenfalls durchführbar; Berechnung von $q_2(v)$ dann bei Kenntnis von $q_1(v)$, bzw. Berechnung von $q_j(v)$ bei Kenntnis von $q_{j-1}(v)$ und $q_{j-2}(v)$:

$$q_2(v)q_1(v + \mathrm{i}\epsilon_1)\phi_-(v - \mathrm{i}\epsilon_1)\mathrm{e}^{\beta\mu_1} + q_2(v + \mathrm{i}\epsilon_2)q_1(v - \mathrm{i}\epsilon_2)\phi_-(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_2}$$
$$= q_1(v) \times \left\{\text{Polynom in } v\right\} =: f_2(v)$$

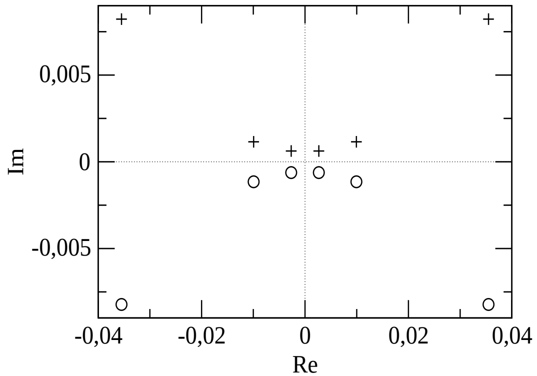
$$q_j(v)q_{j-1}(v + \mathrm{i}\epsilon_{j-1})q_{j-2}(v - \mathrm{i}\epsilon_{j-1})\mathrm{e}^{\beta\mu_{j-1}}$$
$$+ q_j(v + \mathrm{i}\epsilon_j)q_{j-1}(v - \mathrm{i}\epsilon_j)q_{j-2}(v)\mathrm{e}^{\beta\mu_j}$$
$$= q_{j-1}(v) \times \left\{\text{Polynom in } v\right\} =: f_j(v)$$

Klassifikation der Eigenwerte & -zustände

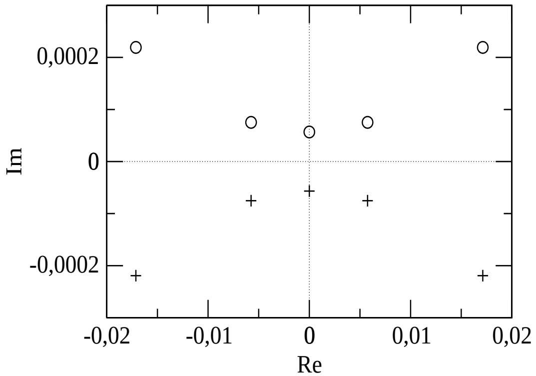
Beispiel SU(3)-Modell:

(*Weitere Lösung: Spiegelung an imag. Achse)

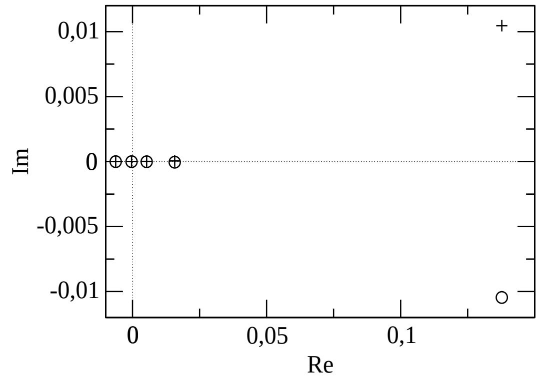
a) $\Lambda = 2.899548494$ [1]



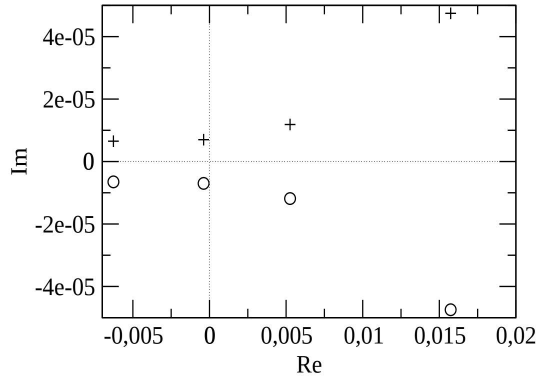
b) $\Lambda = -0.112736496$ [8]



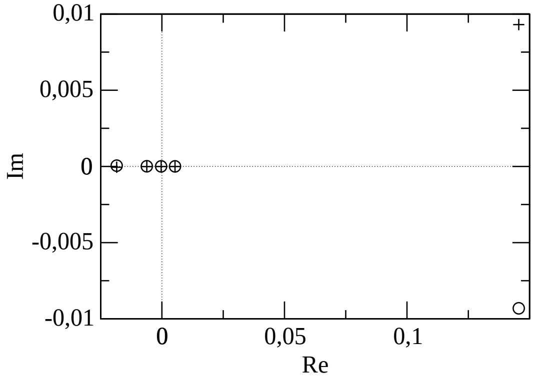
c) $\Lambda = 0.016032988$ [8]*



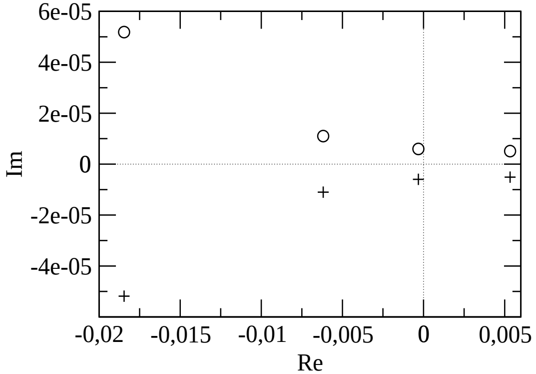
c') Teilvergrößerung von c)



d) $\Lambda = -0.012871361$ [8]*



d') Teilvergrößerung von d)



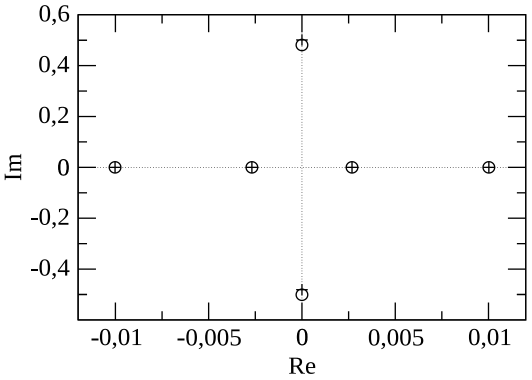
$(N = 12;\, u = -0.01)$

Klassifikation der Eigenwerte & -zustände

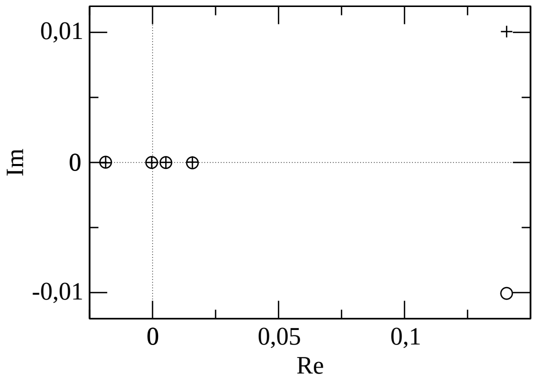
Beispiel SU(3)-Modell:

(*Weitere Lösung: Spiegelung an imag. Achse)

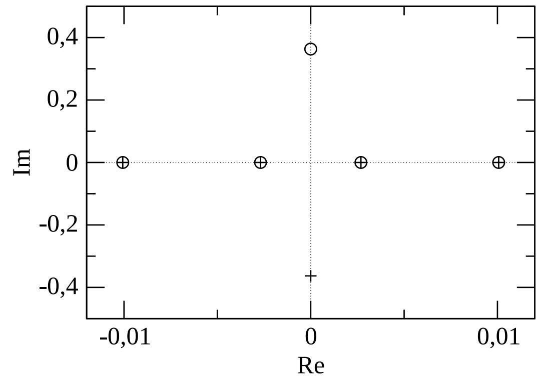
g) $\Lambda = -0.008420021$ [1]



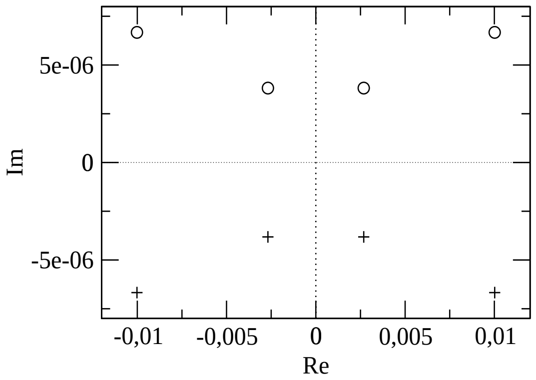
h) $\Lambda = 0.005228863$ [8]*



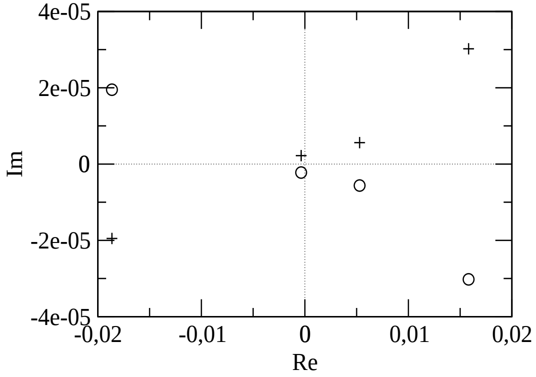
i) $\Lambda = -0.004478022$ [8]



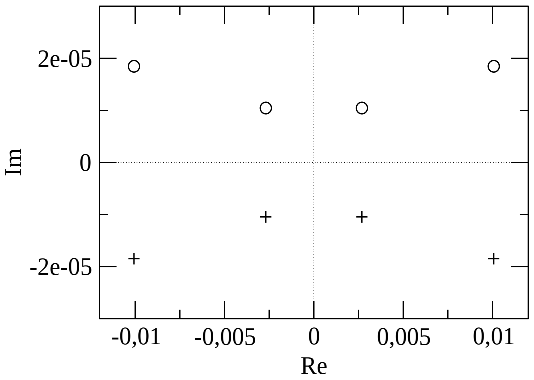
g') Teilvergrößerung von g)



h') Teilvergrößerung von h)



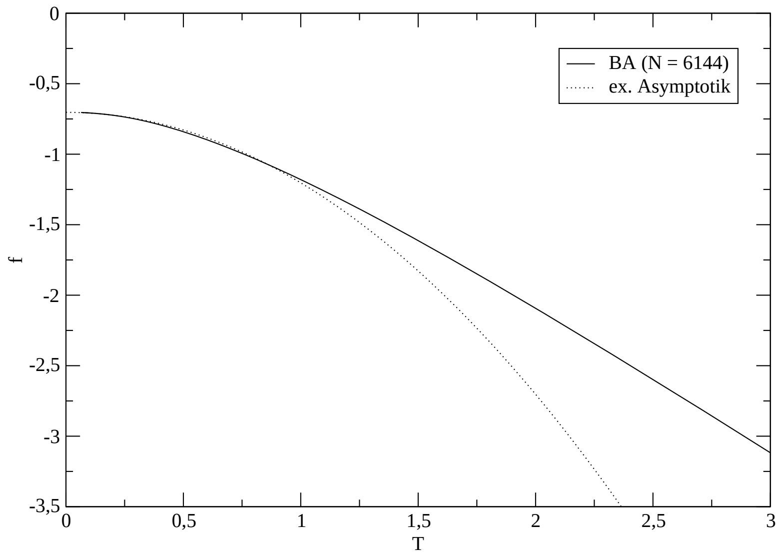
i') Teilvergrößerung von i)



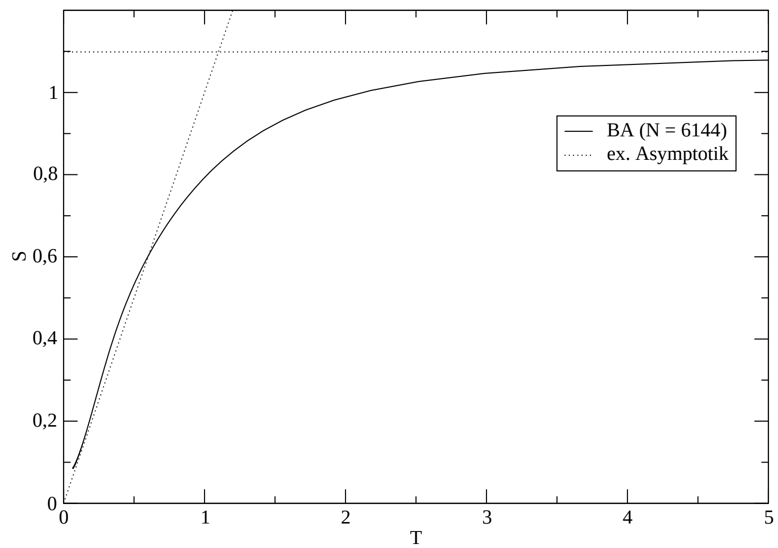
$(N = 12; u = -0.01)$

Thermodynamik

SU(3)-Modell:



Freie Energie f

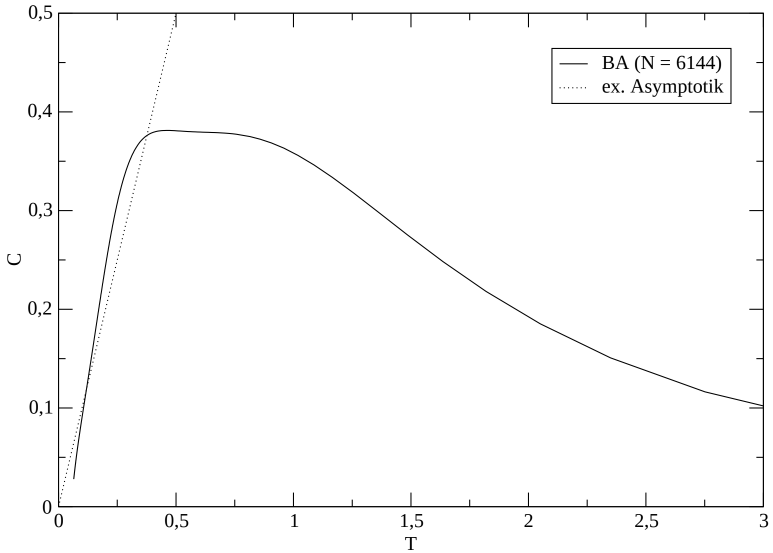


Entropie S

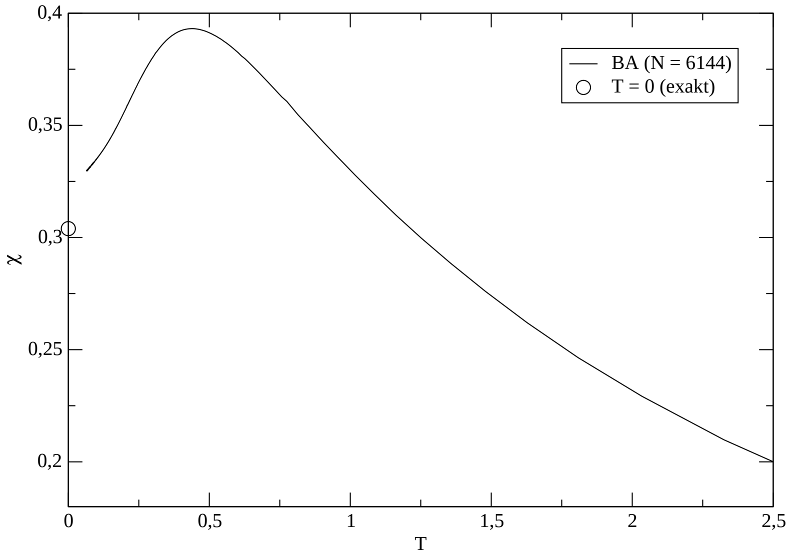
- Tieftemperaturverhalten bestimmt durch CFT:
$$f \simeq f_0 - \frac{\pi c}{6v} T^2 \quad \text{mit } c = 2,\, v = 2\pi/3,\, f_0 = 1 - \pi\sqrt{3}/9 - \ln(3) \approx -0.70321$$
- Asymptotik der Entropie $S \sim T$ für $T \ll 1$; $S \to \ln 3$ für $T \to \infty$

Thermodynamik

SU(3)-Modell:



Wärmekapazität C

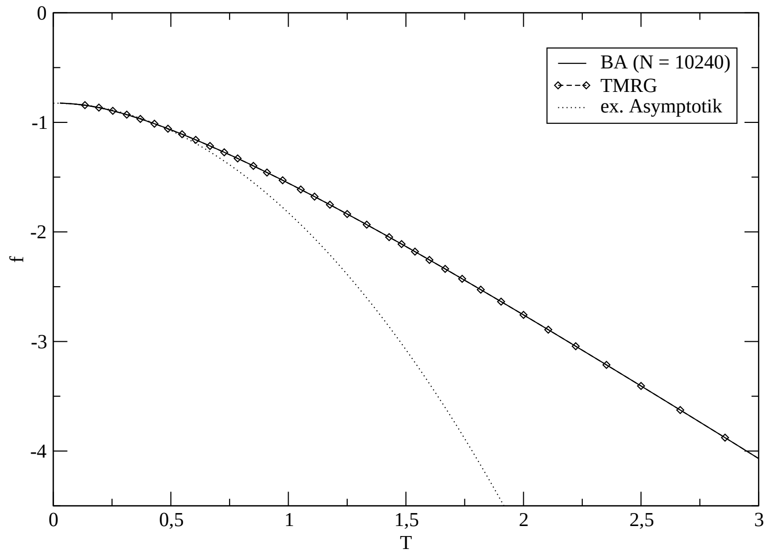


Spin-Suszeptibilität χ_s

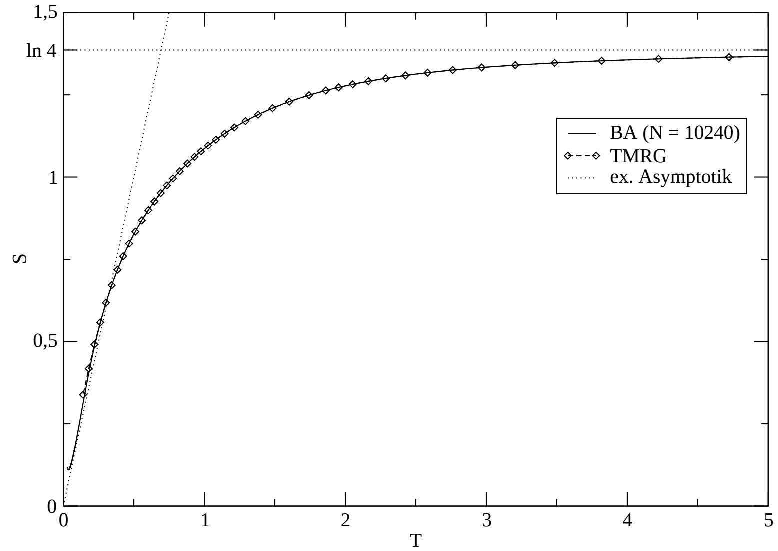
- Asymptotik der Wärmekapazität $C \sim T$ für $T \ll 1$
- Erwartete Spin-Suszeptibilität des Grundzustandes $\xi_s(0) = 3/\pi^2$
  Aber: Abweichung für kleine T wegen Korrekturen mit $\mathcal{O}(1/\log T)$
- Daten sind brauchbar bis $T \gtrsim 0.1$ (Fehler durch endliches N)

Thermodynamik

SU(2)×SU(2)-Spin-Orbital-Modell:



Freie Energie f



Entropie S

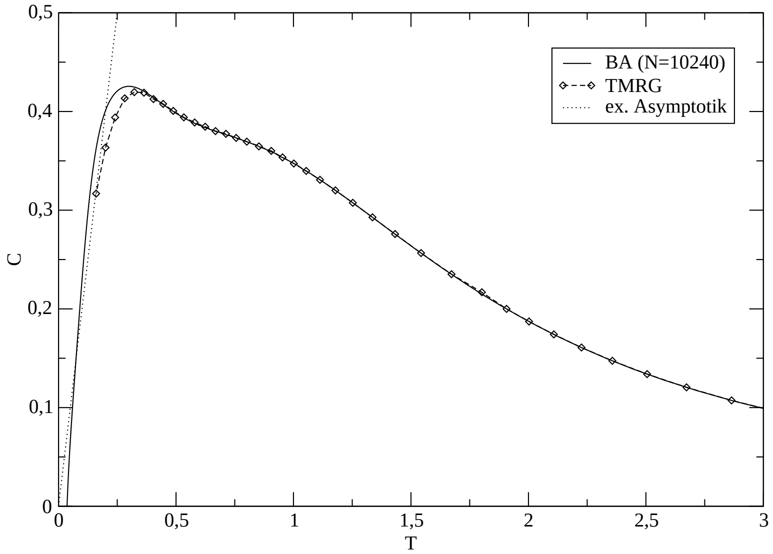
- Tieftemperaturverhalten bestimmt durch CFT:

$$f \simeq f_0 - \frac{\pi c}{6v} T^2 \quad \text{mit } c = 3,\ v = \pi/2,\ f_0 = 1 - \pi/4 - 3\ln(2)/2 \approx -0.82512$$

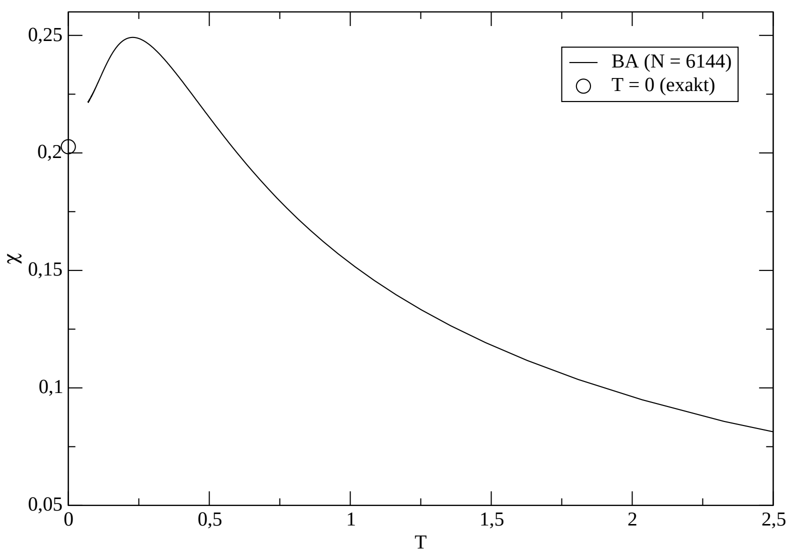
- Asymptotik der Entropie $S \sim 2T$ für $T \ll 1$; $S \to \ln 4$ für $T \to \infty$

Thermodynamik

SU(2)$\times$SU(2)-Spin-Orbital-Modell:



Wärmekapazität C

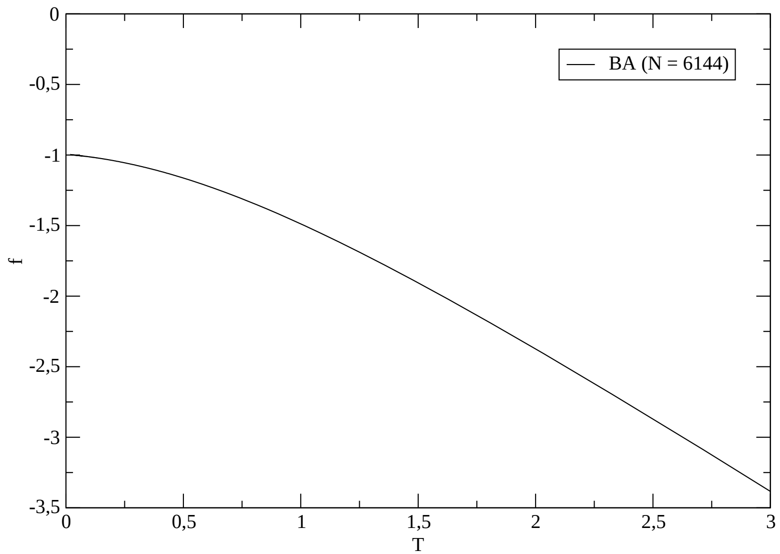


Spin-Suszeptibilität χ_s

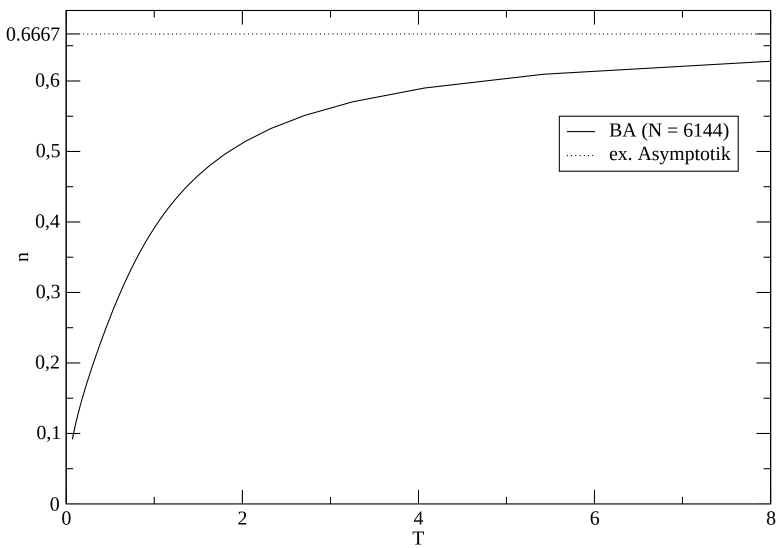
- Asymptotik der Wärmekapazität $C \sim 2T$ für $T \ll 1$
- Erwartete Spin-Suszeptibilität des Grundzustandes $\xi_s(0) = 2/\pi^2$
- Daten sind brauchbar bis $T \gtrsim 0.05$
- Insgesamt hervorragende Übereinstimmung mit TMRG-Rechungen (Sirker 03)

Thermodynamik

Supersymmetrisches t-J-Modell: $(\mu = 0)$



Freie Energie f



Teilchendichte n

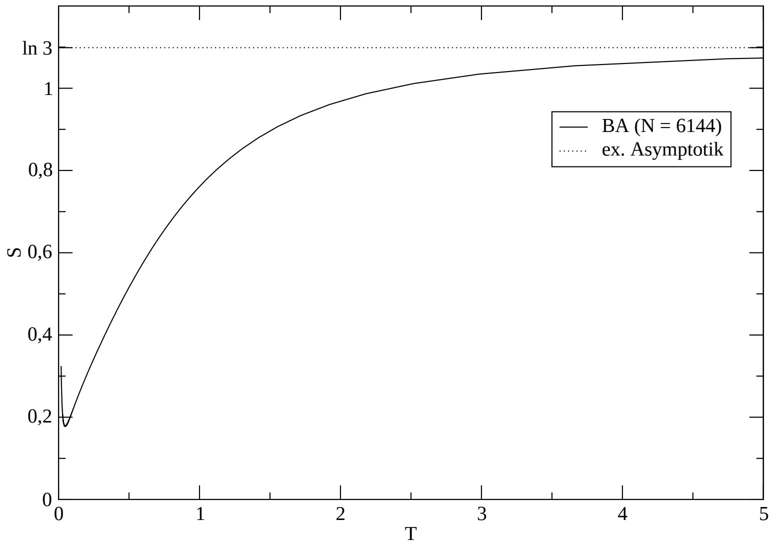
- Tieftemperaturverhalten bestimmt durch CFT:

$$f \simeq f_0 - \frac{\pi}{6}\left(\frac{c_s}{v_s} + \frac{c_c}{v_c}\right) T^2 \quad \text{mit } c_{s,c} = 1,\, v_{s,c} \simeq \pi n,\, f_0 = -1$$

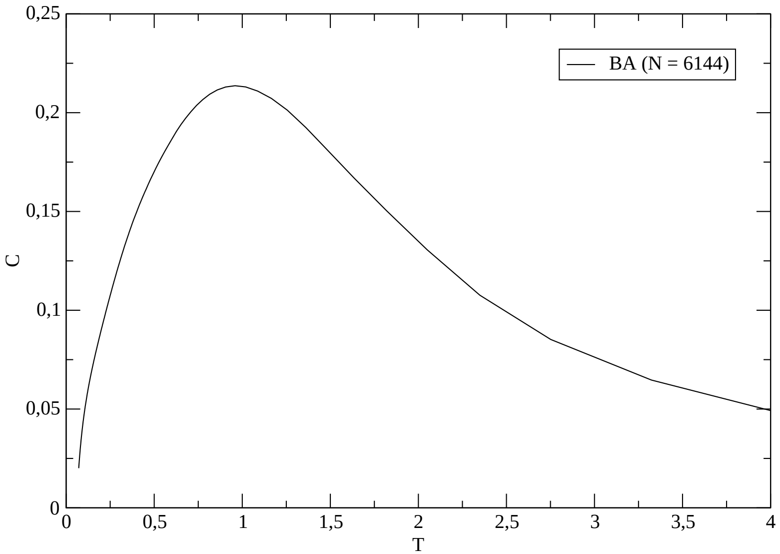
- Grundzustand rein bosonisch $n(0) = 0$; $n \to 2/3$ für $T \to \infty$

Thermodynamik

Supersymmetrisches t-J-Modell: $(\mu = 0)$



Entropie S

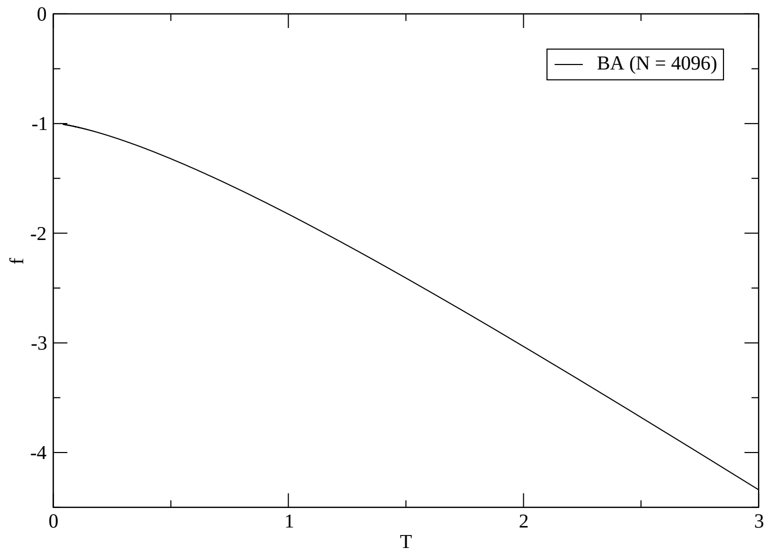


Wärmekapazität C

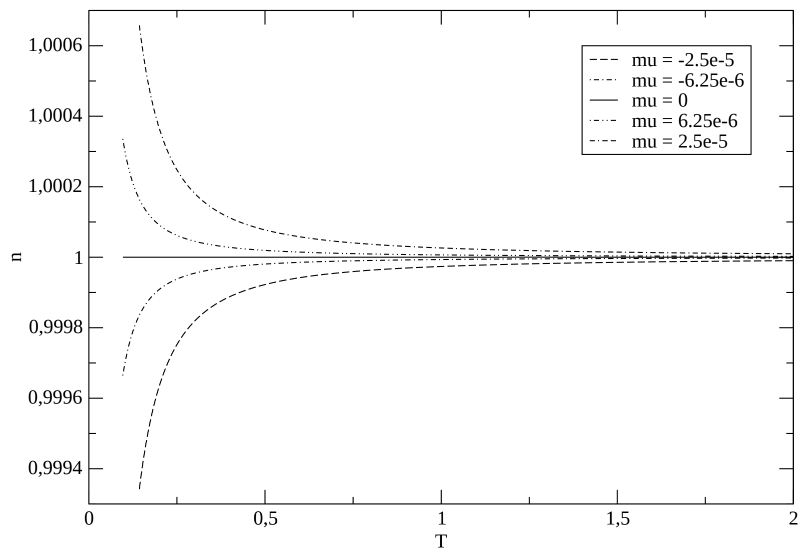
- Asymptotik der Entropie $S \to \ln 3$ für $T \to \infty$
- Anstieg der Entropie für kleine T unphysikalisch:
  Systematischer Fehler durch endliche Trotterzahl N
- Daten sind brauchbar bis $T \gtrsim 0.1$

Thermodynamik

Supersymmetrisches erweitertes Hubbard-Modell: $(\mu = 0)$



Freie Energie f

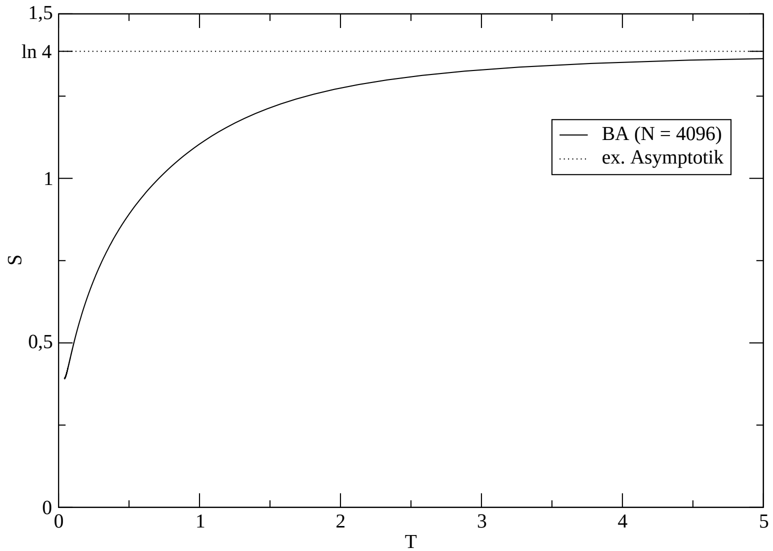


Teilchendichte n

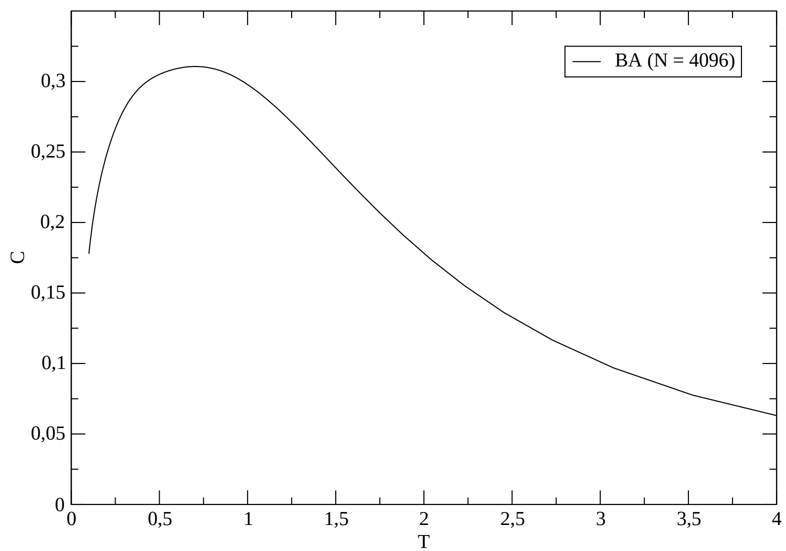
- Grundzustandsenergie stimmt mit der des t-J-Modelles überein $f_0 = -1$, rein bosonischer Grundzustand
- Aber: $n(T) \equiv 1$ für $\mu = 0 \Rightarrow$ zu gleichen Teilen Doppelbesetzung & leere Plätze
- Aus exakter Rechnung: Grundzustand $\mu > 0$ nur Doppelbesetzung, $\mu < 0$ nur leere Plätze

Thermodynamik

Supersymmetrisches erweitertes Hubbard-Modell: $(\mu = 0)$



Entropie S



Wärmekapazität C

- Asymptotik der Entropie $S \longrightarrow \ln 4$ für $T \longrightarrow \infty$
- Daten brauchbar bis $T \gtrsim 0.12$

Zusammenfassung

- Quanten-Transfermatrix-Zugang zu Uimin-Sutherland-Modell
- Numerische Lösung der Bethe-Ansatzgleichungen
- Freie Energie und abgeleitete Größen in Abhängigkeit von T (Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen)
- Direkte Diagonalisierung der Quanten-Transfermatrix für kleine N
- Bestimmung der Bethe-Ansatzzahlen zu bekannten Eigenwerten/-zuständen möglich (neu)

Offene Fragen

- Vorzeichenprobleme bei graduierten Systemen?
- Bestimmung nächstführender Eigenwerte bei großem N?
  $\longrightarrow$ Korrelationslängen
- Allgemeine Behandlung mit NLIE?
  $\longrightarrow$ analytischer Trotterlimes
  (bereits bekannt für SU(3)- und supersymm. t-J-Modell)

Danke

A. Klümper

J. Sirker

A. Seel

M. Bortz