

Nichtlineare Integralgleichungen zur Berechnung der Thermodynamik integrierbarer Quantenketten

Jens Damerau

Fachbereich C – Theoretische Physik
Bergische Universität Wuppertal

Promotionsvortrag, 5. Februar 2008

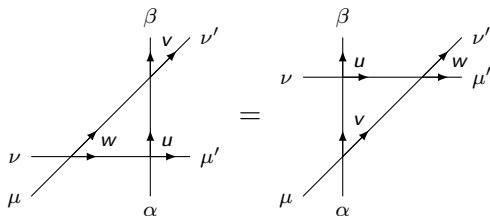


- 1 Einleitung
 - Integrable Quantenketten
 - Das Uimin-Sutherland-Modell
- 2 Thermodynamik und nichtlineare Integralgleichungen
 - Quanten-Transfermatrix-Zugang
 - Nichtlineare Integralgleichungen
 - Allgemeine Struktur der Gleichungen
- 3 Numerische Behandlung der Integralgleichungen
 - Vergleich mit Hochtemperatur-Entwicklung
 - $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell
 - Essler-Korepin-Schoutens-Modell
- 4 Zusammenfassung und offene Fragen

- Betrachte quantenmechanisches Vielteilchenproblem mit bekannter Wechselwirkung
- Zahl der Freiheitsgrade wächst exponentiell mit der Systemgröße, daher im allgemeinen nicht exakt lösbar!

Integrable Quantenkettens

- Betrachte quantenmechanisches Vielteilchenproblem mit bekannter Wechselwirkung
- Zahl der Freiheitsgrade wächst exponentiell mit der Systemgröße, daher im allgemeinen nicht exakt lösbar!
- Beschränkung auf eindimensionale Quantenkettens mit Nächst-Nachbar-Wechselwirkungen
- Integrabilität durch Yang-Baxter-Gleichung:



Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_0 = J \sum_{j=1}^L \pi_{j,j+1}$$

- Eindimensionale Kette mit L Plätzen, periodischen Randbedingungen.
- Jeder Platz j trägt Spin-Variable $\alpha_j \in \{1, \dots, q\}$ mit $p(\alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$.
- Lokale Wechselwirkung durch graduierten Permutationsoperator,

$$\pi_{j,j+1} |\dots \alpha_j \alpha_{j+1} \dots\rangle = (-1)^{p(\alpha_j)p(\alpha_{j+1})} |\dots \alpha_{j+1} \alpha_j \dots\rangle.$$

Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_0 = J \sum_{j=1}^L \pi_{j,j+1}$$

- Eindimensionale Kette mit L Plätzen, periodischen Randbedingungen.
- Jeder Platz j trägt Spin-Variable $\alpha_j \in \{1, \dots, q\}$ mit $p(\alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$.
- Lokale Wechselwirkung durch graduierten Permutationsoperator,

$$\pi_{j,j+1} |\dots \alpha_j \alpha_{j+1} \dots\rangle = (-1)^{p(\alpha_j)p(\alpha_{j+1})} |\dots \alpha_{j+1} \alpha_j \dots\rangle.$$

- Modell ist $sl(r|s)$ -symmetrisch, wobei r und s (mit $q = r + s$) die Anzahl der Zustände α mit $p(\alpha) = 0$ bzw. $p(\alpha) = 1$ sind.

Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{ext}} = J \sum_{j=1}^L \pi_{j,j+1} - \sum_{j=1}^L \sum_{\alpha=1}^q \mu_{\alpha} n_{j,\alpha}$$

- Eindimensionale Kette mit L Plätzen, periodischen Randbedingungen.
- Jeder Platz j trägt Spin-Variable $\alpha_j \in \{1, \dots, q\}$ mit $p(\alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$.
- Lokale Wechselwirkung durch graduierten Permutationsoperator,

$$\pi_{j,j+1} |\dots \alpha_j \alpha_{j+1} \dots\rangle = (-1)^{p(\alpha_j)p(\alpha_{j+1})} |\dots \alpha_{j+1} \alpha_j \dots\rangle.$$

- Modell ist $s|(r|s)$ -symmetrisch, wobei r und s (mit $q = r + s$) die Anzahl der Zustände α mit $p(\alpha) = 0$ bzw. $p(\alpha) = 1$ sind.
- Einbeziehung externer Felder durch allg. chemische Potentiale μ_{α} .

Anwendungen des Modells (Auswahl)

Viele interessante Modelle sind vom Uimin-Sutherland-Typ:

- Spin-1/2-Heisenbergkette:

$$[q = 2, r = 2, s = 0]$$

$$\blacktriangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L S_j^z$$

Anwendungen des Modells (Auswahl)

Viele interessante Modelle sind vom Uimin-Sutherland-Typ:

- Spin-1/2-Heisenbergkette: $[q = 2, r = 2, s = 0]$

$$\triangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L S_j^z$$

- Supersymmetrisches t - J -Modell ($2t = J$): $[q = 3, r = 2, s = 1]$

$$\triangleright \mathcal{H} = t \sum_{j=1}^L \sum_{\sigma} \mathcal{P}(c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j+1,\sigma} + c_{j,\sigma} c_{j+1,\sigma}^{\dagger}) \mathcal{P} + J \sum_{j=1}^L (\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} - n_j n_{j+1}/4)$$

Anwendungen des Modells (Auswahl)

Viele interessante Modelle sind vom Uimin-Sutherland-Typ:

- Spin-1/2-Heisenbergkette: $[q = 2, r = 2, s = 0]$

$$\blacktriangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L S_j^z$$

- Supersymmetrisches t - J -Modell ($2t = J$): $[q = 3, r = 2, s = 1]$

$$\blacktriangleright \mathcal{H} = t \sum_{j=1}^L \sum_{\sigma} \mathcal{P}(c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j+1,\sigma} + c_{j,\sigma} c_{j+1,\sigma}^{\dagger}) \mathcal{P} + J \sum_{j=1}^L (\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} - n_j n_{j+1}/4)$$

- $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell: $[q = 4, r = 4, s = 0]$

$$\blacktriangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2)(2\boldsymbol{\tau}_j \boldsymbol{\tau}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L (g_S S_j^z + g_T \tau_j^z)$$

Anwendungen des Modells (Auswahl)

Viele interessante Modelle sind vom Uimin-Sutherland-Typ:

- Spin-1/2-Heisenbergkette: $[q = 2, r = 2, s = 0]$

$$\triangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L S_j^z$$

- Supersymmetrisches t - J -Modell ($2t = J$): $[q = 3, r = 2, s = 1]$

$$\triangleright \mathcal{H} = t \sum_{j=1}^L \sum_{\sigma} \mathcal{P}(c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j+1,\sigma} + c_{j,\sigma} c_{j+1,\sigma}^{\dagger}) \mathcal{P} + J \sum_{j=1}^L (\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} - n_j n_{j+1}/4)$$

- $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell: $[q = 4, r = 4, s = 0]$

$$\triangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L (2\mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} + 1/2)(2\boldsymbol{\tau}_j \boldsymbol{\tau}_{j+1} + 1/2) - h \sum_{j=1}^L (g_S S_j^z + g_T \tau_j^z)$$

- Essler-Korepin-Schoutens-Modell: $[q = 4, r = 2, s = 2]$

$$\triangleright \mathcal{H} = J \sum_{j=1}^L [(c_{j,\uparrow}^{\dagger} c_{j+1,\uparrow} + c_{j,\uparrow} c_{j+1,\uparrow}^{\dagger})(1 - n_{j,\downarrow} - n_{j+1,\downarrow}) + \dots]$$

Ziel

Berechnung der Zustandssumme, $Z = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$.

Ziel

Berechnung der Zustandssumme, $Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$.

- Trotter-Suzuki-Abbildung auf klassisches Vertex-Modell:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\left(\mathcal{T}(u) \bar{\mathcal{T}}(u) \right)^{N/2} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{ext}}} \right] \quad \text{mit } u = -J\beta/N$$

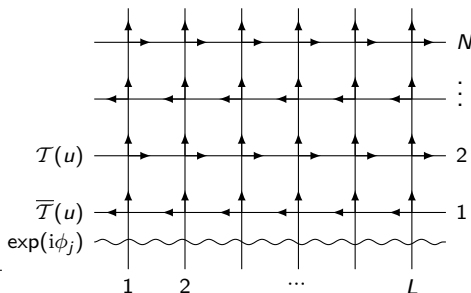
- Transfermatrizen:

$$\mathcal{T}(u) = \mathcal{T}_R e^{u \cdot \mathcal{H}_0 / J + \mathcal{O}(u^2)}$$

$$\bar{\mathcal{T}}(u) = \mathcal{T}_L e^{u \cdot \mathcal{H}_0 / J + \mathcal{O}(u^2)}$$

- Boltzmann-Gewichte:

$$R(u) = \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \rightarrow \end{array}, \quad \bar{R}(u) = \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \leftarrow \end{array}$$



Ziel

Berechnung der Zustandssumme, $Z = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$.

- Trotter-Suzuki-Abbildung auf klassisches Vertex-Modell:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\left(\mathcal{T}(u) \bar{\mathcal{T}}(u) \right)^{N/2} e^{-\beta \mathcal{H}_{\text{ext}}} \right] \quad \text{mit } u = -J\beta/N$$

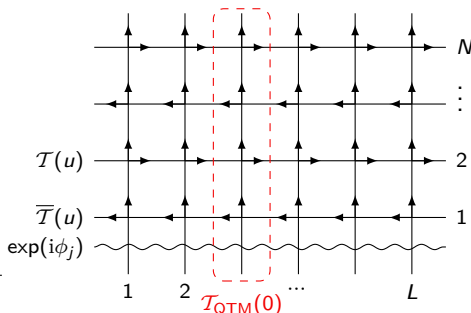
- Transfermatrizen:

$$\mathcal{T}(u) = \mathcal{T}_R e^{u \cdot \mathcal{H}_0 / J + \mathcal{O}(u^2)}$$

$$\bar{\mathcal{T}}(u) = \mathcal{T}_L e^{u \cdot \mathcal{H}_0 / J + \mathcal{O}(u^2)}$$

- Boltzmann-Gewichte:

$$R(u) = \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \rightarrow \end{array}, \quad \bar{R}(u) = \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \leftarrow \end{array}$$



Quanten-Transfermatrix (QTM)

$$(\mathcal{T}_{\text{QTM}})_{\alpha}^{\beta}(\nu) = \sum_{\{\nu\}} e^{\beta\mu\nu_1} \prod_{j=1}^{N/2} R_{\alpha_{2j-1}\nu_{2j-1}}^{\beta_{2j-1}\nu_{2j}}(i\nu - J\beta/N) \tilde{R}_{\alpha_{2j}\nu_{2j}}^{\beta_{2j}\nu_{2j+1}}(i\nu + J\beta/N)$$

- Vereinfachter Ausdruck für die Zustandssumme:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}(\mathcal{T}_{\text{QTM}}(0))^L$$

Quanten-Transfermatrix (QTM)

$$(\mathcal{T}_{\text{QTM}})_{\alpha}^{\beta}(\nu) = \sum_{\{\nu\}} e^{\beta\mu\nu_1} \prod_{j=1}^{N/2} R_{\alpha_{2j-1}\nu_{2j-1}}^{\beta_{2j-1}\nu_{2j}}(i\nu - J\beta/N) \tilde{R}_{\alpha_{2j}\nu_{2j}}^{\beta_{2j}\nu_{2j+1}}(i\nu + J\beta/N)$$

- Vereinfachter Ausdruck für die Zustandssumme:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}(\mathcal{T}_{\text{QTM}}(0))^L$$

- Im thermodynamischen Limes hängt die freie Energie allein vom größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(0)$ ab:

$$f = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L\beta} \ln Z = - \frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \Lambda_{\max}(0)$$

Quanten-Transfermatrix (QTM)

$$(\mathcal{T}_{\text{QTM}})_{\alpha}^{\beta}(\nu) = \sum_{\{\nu\}} e^{\beta\mu\nu_1} \prod_{j=1}^{N/2} R_{\alpha_{2j-1}\nu_{2j-1}}^{\beta_{2j-1}\nu_{2j}}(i\nu - J\beta/N) \tilde{R}_{\alpha_{2j}\nu_{2j}}^{\beta_{2j}\nu_{2j+1}}(i\nu + J\beta/N)$$

- Vereinfachter Ausdruck für die Zustandssumme:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}(\mathcal{T}_{\text{QTM}}(0))^L$$

- Im thermodynamischen Limes hängt die freie Energie allein vom größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(0)$ ab:

$$f = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L\beta} \ln Z = - \frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \Lambda_{\max}(0)$$

- Quanten-Transfermatrizen bilden kommutierende Familie:

$$[\mathcal{T}_{\text{QTM}}(\nu), \mathcal{T}_{\text{QTM}}(\nu')] = 0 \quad \text{für alle } \nu, \nu' \in \mathbb{C}.$$

- Diagonalisierung ist mit Hilfe des **Bethe-Ansatzes** möglich:

$$\Lambda(v) = \sum_{j=1}^q \lambda_j(v) = \sum_{j=1}^q \phi_-(v) \phi_+(v) \frac{q_{j-1}(v - i\epsilon_j)}{q_{j-1}(v)} \frac{q_j(v + i\epsilon_j)}{q_j(v)} e^{\beta\mu_j}.$$

- **Bethe-Ansatz-Gleichungen** stellen sicher, daß $\Lambda(v)$ analytisch ist:

$$\frac{\lambda_j(v_{k_j}^j)}{\lambda_{j+1}(v_{k_j}^j)} = -1 \quad \text{für alle Nullstellen } v_{k_j}^j \text{ der Polynome } q_j(v),$$

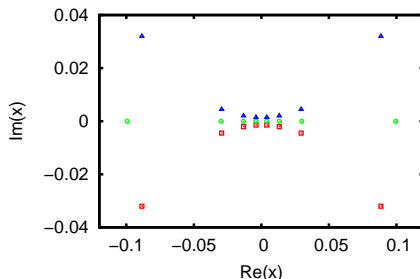
$$\Leftrightarrow \operatorname{Res}_{v=v_{k_j}^j} (\lambda_j(v) + \lambda_{j+1}(v)) = 0.$$

- Größter Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$: Polynome $q_j(v)$ jeweils vom Grad $N/2$.

Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen

Lösung für den größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$:

- $(q - 1)$ viele Sätze mit jeweils $N/2$ vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $v_{k_j}^j$.

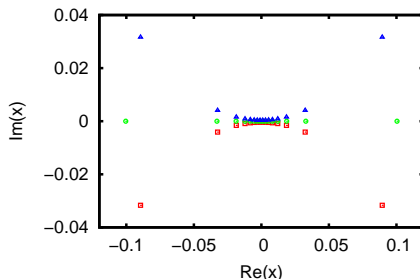


Beispiel: Bethe-Ansatz-Zahlen für $q = 4$, $N = 16$.

Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen

Lösung für den größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$:

- $(q - 1)$ viele Sätze mit jeweils $N/2$ vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $v_{k_j}^j$.

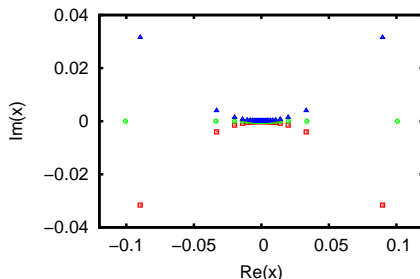


Beispiel: Bethe-Ansatz-Zahlen für $q = 4$, $N = 32$.

Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen

Lösung für den größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$:

- $(q - 1)$ viele Sätze mit jeweils $N/2$ vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $v_{k_j}^j$.

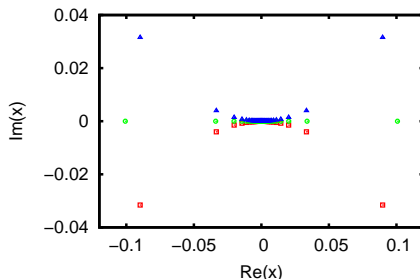


Beispiel: Bethe-Ansatz-Zahlen für $q = 4$, $N = 64$.

Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen

Lösung für den größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$:

- $(q - 1)$ viele Sätze mit jeweils $N/2$ vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $v_{k_j}^j$.

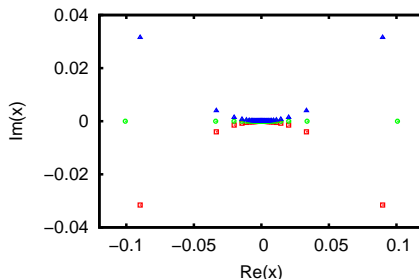


Beispiel: Bethe-Ansatz-Zahlen für $q = 4$, $N = 128$.

Verteilung der Bethe-Ansatz-Zahlen

Lösung für den größten Eigenwert $\Lambda_{\max}(v)$:

- $(q - 1)$ viele Sätze mit jeweils $N/2$ vielen Bethe-Ansatz-Zahlen $v_{k_j}^j$.
- $N \rightarrow \infty$: Häufungspunkt im Ursprung, aber **diskrete Verteilung**.
⇒ Keine Beschreibung über Dichtefunktionen möglich.



Beispiel: Bethe-Ansatz-Zahlen für $q = 4$, $N = 128$.

Problem

Unendlich viele gekoppelte
Gleichungen im Limes $N \rightarrow \infty$.

Problem

Unendlich viele gekoppelte Gleichungen im Limes $N \rightarrow \infty$.

Ausweg

Transformiere BA-Gleichungen in nichtlineare Integralgleichungen.

Problem

Unendlich viele gekoppelte Gleichungen im Limes $N \rightarrow \infty$.

Ausweg

Transformiere BA-Gleichungen in nichtlineare Integralgleichungen.

- 1 Definiere Hilfsfunktionen (für endliche Trotter-Zahl N) mit geeigneter Null- und Polstellenverteilung.
- 2 Ausnutzen der Analytizitätseigenschaften.
- 3 Erhalte selbstkonsistentes System nichtlinearer Integralgleichungen.
Schließlich: Trotter-Limes $N \rightarrow \infty$ analytisch durchführbar.

- TBA-Gleichungen: (Johannesson 86, Jüttner et al. 98)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $y_m^{(a)}(x) = \frac{\Lambda_{m-1}^{(a)}(x)\Lambda_{m+1}^{(a)}(x)}{\Lambda_m^{(a-1)}(x)\Lambda_m^{(a+1)}(x)}$
- Gleichungen vom Takahashi-Typ: (Tsuboi 03)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $\Lambda_1^{(a)}(x)$
- Gleichungen vom Klümper-Typ: (Klümper 92)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $b_{m,j}^{(a)}(x)$ zusammengesetzt aus $\lambda_j(x + ic)$

- TBA-Gleichungen: (Johannesson 86, Jüttner et al. 98)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $y_m^{(a)}(x) = \frac{\Lambda_{m-1}^{(a)}(x)\Lambda_{m+1}^{(a)}(x)}{\Lambda_m^{(a-1)}(x)\Lambda_m^{(a+1)}(x)}$
 - + Allgemeine Herleitung bekannt
 - Unendliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
- Gleichungen vom Takahashi-Typ: (Tsuboi 03)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $\Lambda_1^{(a)}(x)$
- Gleichungen vom Klümper-Typ: (Klümper 92)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $b_{m,j}^{(a)}(x)$ zusammengesetzt aus $\lambda_j(x + ic)$

- TBA-Gleichungen: (Johannesson 86, Jüttner et al. 98)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $y_m^{(a)}(x) = \frac{\Lambda_{m-1}^{(a)}(x)\Lambda_{m+1}^{(a)}(x)}{\Lambda_m^{(a-1)}(x)\Lambda_m^{(a+1)}(x)}$
 - + Allgemeine Herleitung bekannt
 - Unendliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
- Gleichungen vom Takahashi-Typ: (Tsuboi 03)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $\Lambda_1^{(a)}(x)$
 - + Allgemeine Herleitung bekannt
 - + Endliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
 - Konturintegrale: Ungeeignet für numerische Auswertung
- Gleichungen vom Klümper-Typ: (Klümper 92)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $b_{m,j}^{(a)}(x)$ zusammengesetzt aus $\lambda_j(x + ic)$

- TBA-Gleichungen: (Johannesson 86, Jüttner et al. 98)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $y_m^{(a)}(x) = \frac{\Lambda_{m-1}^{(a)}(x)\Lambda_{m+1}^{(a)}(x)}{\Lambda_m^{(a-1)}(x)\Lambda_m^{(a+1)}(x)}$
 - + Allgemeine Herleitung bekannt
 - Unendliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
- Gleichungen vom Takahashi-Typ: (Tsuboi 03)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $\Lambda_1^{(a)}(x)$
 - + Allgemeine Herleitung bekannt
 - + Endliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
 - Konturintegrale: Ungeeignet für numerische Auswertung
- Gleichungen vom Klümper-Typ: (Klümper 92)
 - ▶ Hilfsfunktionen: $b_{m,j}^{(a)}(x)$ zusammengesetzt aus $\lambda_j(x + ic)$
 - + Endliche Anzahl gekoppelter Gleichungen
 - + Faltungsintegrale: Hervorragend geeignet für Numerik
 - Nur für wenige Modelle bekannt (Stand 2004: $q \leq 3$)

Beispiel: $s/(2)$ -symmetrischer Fall

Hilfsfunktionen

$$b_1(x) = \frac{\lambda_1(x + \frac{i}{2})}{\lambda_2(x + \frac{i}{2})}, \quad b_2(x) = \frac{\lambda_2(x - \frac{i}{2})}{\lambda_1(x - \frac{i}{2})}, \quad B_j(x) = b_j(x) + 1.$$

Hilfsfunktionen

$$b_1(x) = \frac{\lambda_1(x + \frac{i}{2})}{\lambda_2(x + \frac{i}{2})}, \quad b_2(x) = \frac{\lambda_2(x - \frac{i}{2})}{\lambda_1(x - \frac{i}{2})}, \quad B_j(x) = b_j(x) + 1.$$

- Fouriertransformation der logarithmischen Ableitung:

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [\ln f(x)] e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

- Ergebnis für $k < 0$:

$$\widehat{b}_1(k) = e^{k/2} \widehat{\phi}_-(k) - e^{k/2} \widehat{q}_1(k),$$

$$\widehat{b}_2(k) = e^{k/2} \widehat{\phi}_-(k) + e^{3k/2} \widehat{q}_1(k) - e^{3k/2} \widehat{\phi}_-(k) - e^{k/2} \widehat{\phi}_+(k),$$

$$\widehat{B}_1(k) = e^{-k/2} \widehat{\Lambda}(k) - e^{k/2} \widehat{q}_1(k),$$

$$\widehat{B}_2(k) = e^{k/2} \widehat{\Lambda}(k) + e^{k/2} \widehat{q}_1(k) - e^{3k/2} \widehat{\phi}_-(k) - e^{k/2} \widehat{\phi}_+(k).$$

(Fall $k > 0$ kann analog behandelt werden.)

Beispiel: $s/(2)$ -symmetrischer Fall

- Eliminieren von $\widehat{\Lambda}(k)$ und $\widehat{q}_1(k)$ liefert:

$$\widehat{b}_1(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) - \frac{e^{-k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k),$$

$$\widehat{b}_2(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} - \frac{e^{k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k).$$

Beispiel: $s/(2)$ -symmetrischer Fall

- Eliminieren von $\widehat{\Lambda}(k)$ und $\widehat{q}_1(k)$ liefert:

$$\widehat{b}_1(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) - \frac{e^{-k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k),$$

$$\widehat{b}_2(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} - \frac{e^{k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k).$$

- Trotter-Limes $N \rightarrow \infty$ und inverse Transformation:

$$\ln b_1(x) = -\beta \left(\frac{J\pi}{\cosh(\pi x)} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right) - [K_0 * \ln B_1](x) - [K_1 * \ln B_2](x),$$

$$\ln b_2(x) = -\beta \left(\frac{J\pi}{\cosh(\pi x)} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) - [K_2 * \ln B_1](x) - [K_0 * \ln B_2](x).$$

Beispiel: $s/(2)$ -symmetrischer Fall

- Eliminieren von $\widehat{\Lambda}(k)$ und $\widehat{q}_1(k)$ liefert:

$$\widehat{b}_1(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) - \frac{e^{-k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k),$$

$$\widehat{b}_2(k) = -\frac{iN \sinh(kJ\beta/N)}{2 \cosh(k/2)} - \frac{e^{k-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_1(k) + \frac{e^{-|k|/2}}{e^{-k/2} + e^{k/2}} \widehat{B}_2(k).$$

- Trotter-Limes $N \rightarrow \infty$ und inverse Transformation:

$$\ln b_1(x) = -\beta \left(\frac{J\pi}{\cosh(\pi x)} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right) - [K_0 * \ln B_1](x) - [K_1 * \ln B_2](x),$$

$$\ln b_2(x) = -\beta \left(\frac{J\pi}{\cosh(\pi x)} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) - [K_2 * \ln B_1](x) - [K_0 * \ln B_2](x).$$

- Größter Eigenwert:

$$\ln \Lambda_{\max}(0) = -\beta \left\{ J(1 - 2 \ln 2) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right\} + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\pi}{\cosh(\pi x)} * \ln B_j \right](0).$$

Weitere bekannte Hilfsfunktionen

- $s/(2|1)$ -symmetrischer Fall: (Jüttner & Klümper 97)

$$b_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2} + \boxed{3}} \Big|_{x+i/2}, \quad b_{1,2}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{1} + \boxed{2}} \Big|_{x-i/2},$$

$$b_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} \cdot \boxed{3}}{\boxed{2} \cdot (\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3})} \Big|_x.$$

- $s/(3)$ -symmetrischer Fall: (Fujii & Klümper 99)

$$b_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2} + \boxed{3}} \Big|_{x+i/2}, \quad b_{1,2}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{1} \cdot \boxed{2}}{\boxed{3} \cdot (\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}})} \Big|_x,$$

$$b_{1,3}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{1} + \boxed{2}} \Big|_{x-i/2}, \quad b_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1}}{\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}} \Big|_{x+i/2},$$

$$b_{1,2}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} \cdot \boxed{3}}{\boxed{2} \cdot (\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3})} \Big|_x, \quad b_{1,3}^{(2)}(x) = \frac{\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}}{\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}} \Big|_{x-i/2}.$$

- Hilfsfunktionen lassen sich mit „Young-Tableaux“ schreiben:

$$\boxed{j} \Big|_x = \lambda_j(x), \quad \boxed{\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}} \Big|_x = \lambda_j(x - \frac{i}{2}) \lambda_k(x + \frac{i}{2}).$$

- Auftauchende Terme sind Teilsummen von $\Lambda_1^{(a)}(x)$.
- Zusammenhang mit Hilfsfunktionen des TBA-Zugangs:

$$Y_1^{(a)}(x) = \prod_{j=1}^{d_a} B_{1,j}^{(a)}(x), \quad \text{wobei } d_a = \binom{n}{a}.$$

- Vermutung für Gesamtzahl der benötigten Hilfsfunktionen:

$$sl(n): \sum_{a=1}^{n-1} d_a = 2^n - 2, \quad sl(n|1): \sum_{a=1}^n d_a = 2^n - 1.$$

Neue Hilfsfunktionen für den $s/(4)$ -symmetrischen Fall

$$b_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}} \Big|_{x+i/2} \quad b_{1,4}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{4}}{\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,2}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}} \cdot \left(\boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)}{\left(\boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} \right) \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,3}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{3}} \cdot \boxed{\frac{3}{4}}}{\boxed{\frac{1}{4}} \cdot \left(\boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}}} \Big|_{x+i/2}$$

$$b_{1,2}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{3}} \cdot \boxed{\frac{3}{4}}}{\left(\boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right) \cdot \left(\boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)} \Big|_{x+i/2}$$

$$b_{1,3}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} \cdot \boxed{4}}{\left(\boxed{2} + \boxed{3} \right) \cdot \left(\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,4}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{2}{3}} \cdot \boxed{\frac{3}{4}}}{\left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,5}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{2}{4}}}{\left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} \right) \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{2}{3}} \right)} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,6}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{\frac{3}{4}}}{\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{2}{3}}}{\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}}} \Big|_{x+i/2} \quad b_{1,4}^{(3)}(x) = \frac{\boxed{\frac{2}{3}} \cdot \boxed{\frac{3}{4}}}{\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,2}^{(3)}(x) = \frac{\boxed{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{\frac{2}{4}}}{\boxed{\frac{2}{3}} \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,3}^{(3)}(x) = \frac{\boxed{\frac{3}{4}} \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} \right)}{\left(\boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} \right) \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$\boxed{j}_x = \lambda_j(x) \quad \boxed{\frac{j}{k}}_x = \lambda_j(x-i/2)\lambda_k(x+i/2) \quad \boxed{\frac{j}{l}}_x = \lambda_j(x-i)\lambda_k(x)\lambda_l(x+i) \quad (j \leq k \leq l)$$

Neue Hilfsfunktionen für den $s/(3|1)$ -symmetrischen Fall

$$b_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}} \Big|_{x+i/2} \quad b_{1,3}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{4}}{\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,2}^{(1)}(x) = \frac{\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \cdot \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \right)}{\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \cdot \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \right)} \Big|_x$$

$$b_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \cdot \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \right)}{\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \right) \cdot \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \right)} \Big|_{x+i/2}$$

$$b_{1,2}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} \cdot \boxed{4}}{(\boxed{2} + \boxed{3}) \cdot (\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4})} \Big|_x$$

$$b_{1,3}^{(2)}(x) = \frac{\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \cdot \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}}{\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} \right) \cdot \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \right)} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,1}^{(3)}(x) = \frac{\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \cdot \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}}{\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \cdot \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{2}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \right)} \Big|_x$$

$$\boxed{j} \Big|_x = \lambda_j(x) \quad \boxed{\frac{j}{k}} \Big|_x = \lambda_j(x - i/2) \lambda_k(x + i/2)$$

Neue Hilfsfunktionen für den $s/(2|2)$ -symmetrischen Fall

$$b_{1,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{11} + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{14} + \boxed{23} + \boxed{24} + \boxed{34} + \boxed{44}}{\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{2}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{3}} + \boxed{\frac{3}{4}}} \Big|_x$$

$$b_{2,1}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{11} + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{14}}{\boxed{23} + \boxed{24} + \boxed{34} + \boxed{44}} \Big|_{x+i/2} \quad b_{2,2}^{(1)}(x) = \frac{\boxed{14} + \boxed{24} + \boxed{34} + \boxed{44}}{\boxed{11} + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{23}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{1,1}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}}{\boxed{1} + \boxed{2}} \Big|_x \cdot \frac{\boxed{\frac{3}{3}} + \boxed{\frac{3}{4}}}{\boxed{23} + \boxed{24} + \boxed{34} + \boxed{44}} \Big|_{x+i/2}$$

$$b_{1,2}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}}{\boxed{3} + \boxed{4}} \Big|_x \cdot \frac{\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{2}{2}}}{\boxed{11} + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{23}} \Big|_{x-i/2}$$

$$b_{2,1}^{(2)}(x) = \frac{\boxed{23} \cdot (\boxed{11} + \boxed{12} + \boxed{13} + \boxed{14} + \boxed{23} + \boxed{24} + \boxed{34} + \boxed{44})}{\boxed{14} \cdot \left(\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} + \boxed{\frac{2}{2}} + \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{2}{4}} + \boxed{\frac{3}{3}} + \boxed{\frac{3}{4}} \right)} \Big|_x$$

$$\boxed{j} \Big|_x = \lambda_j(x) \quad \boxed{\frac{j}{k}} \Big|_x = \lambda_j(x - i/2) \lambda_k(x + i/2) \quad \boxed{j|k} \Big|_x = \lambda_j(x + i/2) \lambda_k(x - i/2)$$

Nichtlineare Integralgleichungen

$$\ln b_{1,j}^{(a)}(x) = -\beta \left(JV^{(a)}(x) + c_j^{(a)} \right) - \sum_b \sum_k \left[\mathbf{K}_{j,k}^{(a,b)} * \ln B_{1,j}^{(a)} \right] (x)$$

Größter Eigenwert

$$\ln \Lambda_{\max}(0) = -\beta e_0 + \sum_a \sum_j \left[V^{(a)} * \ln B_{1,j}^{(a)} \right] (0)$$

- Integrationskerne zerfallen in transzendenten und rationalen Anteil:

$$\mathbf{K}_{j,k}^{(a,b)}(x) = \mathcal{K}^{(a,b)}(x) + R_{j,k}^{(a,b)}(x).$$

- Rationale Anteile $R_{j,k}^{(a,b)}(x)$ sind gleich für $sl(n)$ und $sl(n|1)$.

Betrachtung von Grenzfällen

- ① Limes $T \rightarrow 0$ liefert lineare Integralgleichungen für Grundzustand
 - ② Limes $\mu_j \rightarrow -\infty$ bewirkt Ausfrieren des j -ten Basiszustands.
- Zusammen mit den bereits bekannten Ergebnissen ergibt dies eine Reihe von Bedingungen für den allgemeinen Fall.

Betrachtung von Grenzfällen

- ① Limes $T \rightarrow 0$ liefert lineare Integralgleichungen für Grundzustand
 - ② Limes $\mu_j \rightarrow -\infty$ bewirkt Ausfrieren des j -ten Basiszustands.
- Zusammen mit den bereits bekannten Ergebnissen ergibt dies eine Reihe von Bedingungen für den allgemeinen Fall.

Beispiel: $sl(n)$ -symmetrischer Fall:

- Erwarte $(2^n - 2)$ viele gekoppelte Integralgleichungen.
- Funktionen $V^{(a)}(x)$ und $\mathcal{K}^{(a,b)}(x)$ aus Limes $T \rightarrow 0$ bekannt.
- Ausfrieren eines Freiheitsgrades führt auf Gleichungen für $sl(n-1)$. Falls diese bekannt \Rightarrow fast alle Kerne $\mathbf{K}_{j,k}^{(a,b)}(x)$ berechenbar.

Betrachtung von Grenzfällen

- 1 Limes $T \rightarrow 0$ liefert lineare Integralgleichungen für Grundzustand
- 2 Limes $\mu_j \rightarrow -\infty$ bewirkt Ausfrieren des j -ten Basiszustands.

- Zusammen mit den bereits bekannten Ergebnissen ergibt dies eine Reihe von Bedingungen für den allgemeinen Fall.

Beispiel: $sl(n)$ -symmetrischer Fall:

- Erwarte $(2^n - 2)$ viele gekoppelte Integralgleichungen.
- Funktionen $V^{(a)}(x)$ und $\mathcal{K}^{(a,b)}(x)$ aus Limes $T \rightarrow 0$ bekannt.
- Ausfrieren eines Freiheitsgrades führt auf Gleichungen für $sl(n-1)$. Falls diese bekannt \Rightarrow fast alle Kerne $\mathbf{K}_{j,k}^{(a,b)}(x)$ berechenbar.

Schließlich: Solide Vermutung für Gleichungen des $sl(5)$ - und $sl(4|1)$ -Falles.

Numerische Behandlung der Integralgleichungen

- Integralgleichungen können durch Iteration gelöst werden.
- Diskretisierung: Äquidistante Stützstellen und endliches Intervall.
- Effiziente Auswertung der Faltungsintegrale durch Anwendung der schnellen Fourier-Transformation (FFT).
- Ableitungen der freien Energie können direkt berechnet werden:

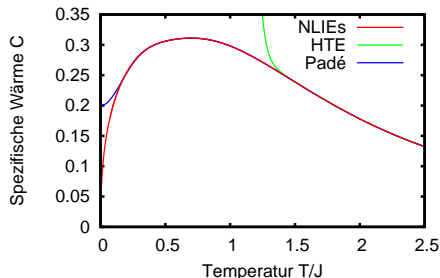
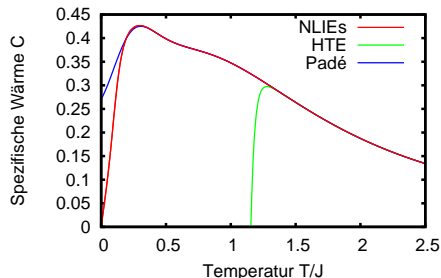
$$f = -\frac{1}{\beta} \ln \Lambda(0), \quad S = \ln \Lambda(0) - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Lambda(0),$$

$$C = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln \Lambda(0) - \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Lambda(0) - \beta \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \mu} \ln \Lambda(0)}{\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln \Lambda(0)},$$

$$n = \frac{\partial}{\beta \partial \mu} \ln \Lambda(0), \quad \kappa = \frac{\partial^2}{\beta \partial \mu^2} \ln \Lambda(0),$$

$$M = \frac{\partial}{\beta \partial h} \ln \Lambda(0), \quad \chi = \frac{\partial^2}{\beta \partial h^2} \ln \Lambda(0).$$

Vergleich mit Hochtemperatur-Entwicklung

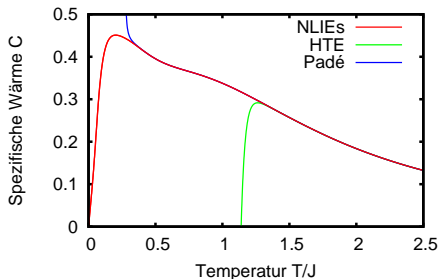


Beispiel: $s/(4)$ -symmetrischer Fall

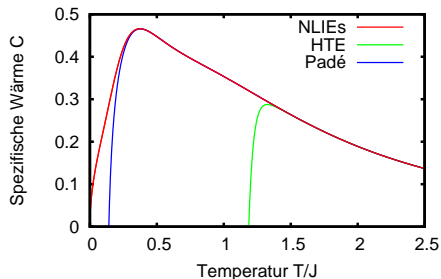
Beispiel: $s/(2|2)$ -symmetrischer Fall

- Hervorragende Übereinstimmung mit Hochtemperatur-Entwicklung und darauf basierender Padé-Approximation (Tsuboi 06).
- Tieftemperaturasymptotik ist kompatibel mit konformer Feldtheorie.
- Genauigkeit der NLIE-Ergebnisse besser als 10^{-9} .

Vergleich mit Hochtemperatur-Entwicklung II



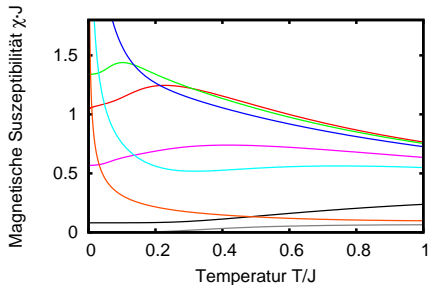
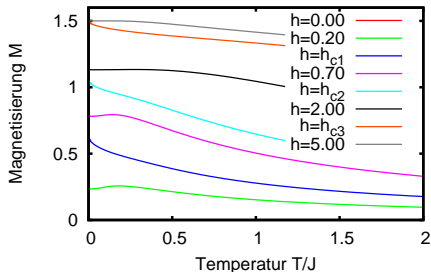
Beispiel: $s/(5)$ -symmetrischer Fall



Beispiel: $s/(4|1)$ -symmetrischer Fall

- Hervorragende Übereinstimmung auch für vermutete Verallgemeinerungen.
- Starkes Indiz für die Korrektheit der neuen Integralgleichungen.
- Wie zuvor: Genauigkeit der Ergebnisse besser als 10^{-9} .

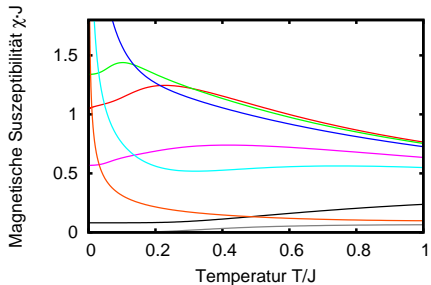
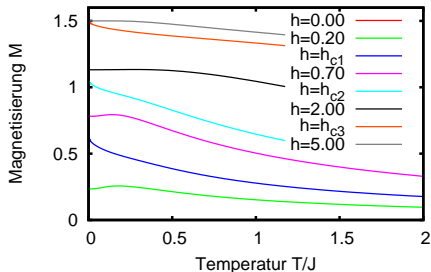
$SU(4)$ Spin-Orbital-Modell bei $g_S = 2$, $g_T = 1$



Magnetfeld koppelt an Spins und Pseudospins:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - g_S h S^z - g_T h \tau^z$,
mit $g_S = 2$, $g_T = 1$
- Basis-Vektoren:
 $|\uparrow_S \uparrow_\tau\rangle, |\uparrow_S \downarrow_\tau\rangle, |\downarrow_S \uparrow_\tau\rangle, |\downarrow_S \downarrow_\tau\rangle$
- Drei kritische Felder:
 - ▶ $h_{c1} \approx 0.370J$
 - ▶ $h_{c2} \approx 0.941J$
 - ▶ $h_{c3} = 4J$
- Divergenz der magnetischen Suszeptibilität bei krit. Feldern

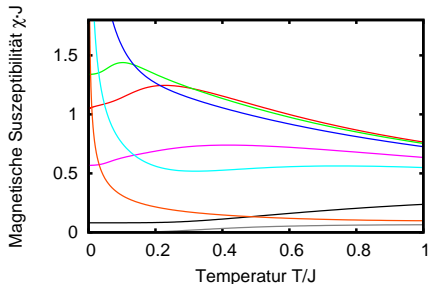
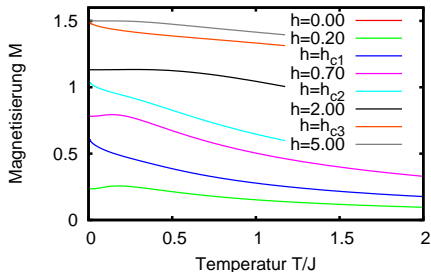
$SU(4)$ Spin-Orbital-Modell bei $g_S = 2, g_T = 1$



Magnetfeld koppelt an Spins und Pseudospins:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - g_S h S^Z - g_T h T^Z$,
mit $g_S = 2, g_T = 1$
- Basis-Vektoren:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, |\downarrow_S \uparrow_T\rangle, |\downarrow_S \downarrow_T\rangle$
- Drei kritische Felder:
 - ▶ $h_{c1} \approx 0.370J$
 - ▶ $h_{c2} \approx 0.941J$
 - ▶ $h_{c3} = 4J$
- Divergenz der magnetischen Suszeptibilität bei krit. Feldern
- Grundzustand für $h > h_{c1}$:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, |\downarrow_S \uparrow_T\rangle, |\downarrow_S \downarrow_T\rangle$

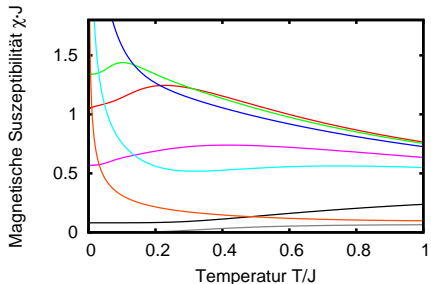
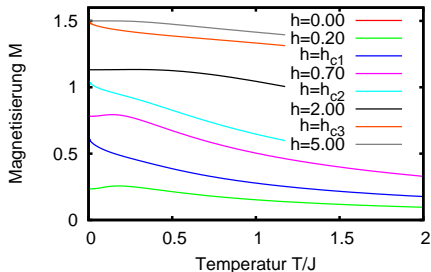
$SU(4)$ Spin-Orbital-Modell bei $g_S = 2, g_T = 1$



Magnetfeld koppelt an Spins und Pseudospins:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - g_S h S^Z - g_T h T^Z$,
mit $g_S = 2, g_T = 1$
- Basis-Vektoren:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, |\downarrow_S \uparrow_T\rangle, |\downarrow_S \downarrow_T\rangle$
- Drei kritische Felder:
 - ▶ $h_{c1} \approx 0.370J$
 - ▶ $h_{c2} \approx 0.941J$
 - ▶ $h_{c3} = 4J$
- Divergenz der magnetischen Suszeptibilität bei krit. Feldern
- Grundzustand für $h > h_{c2}$:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, \cancel{|\downarrow_S \uparrow_T\rangle}, \cancel{|\downarrow_S \downarrow_T\rangle}$

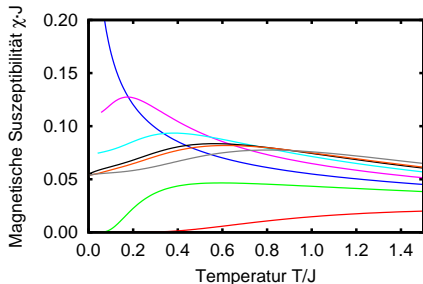
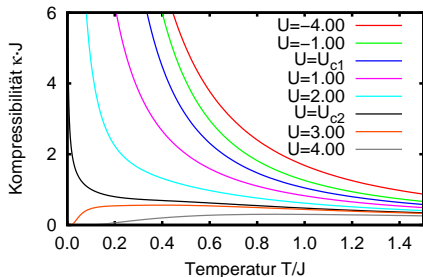
$SU(4)$ Spin-Orbital-Modell bei $g_S = 2, g_T = 1$



Magnetfeld koppelt an Spins und Pseudospins:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - g_S h S^Z - g_T h T^Z$,
mit $g_S = 2, g_T = 1$
- Basis-Vektoren:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, |\downarrow_S \uparrow_T\rangle, |\downarrow_S \downarrow_T\rangle$
- Drei kritische Felder:
 - ▶ $h_{c1} \approx 0.370J$
 - ▶ $h_{c2} \approx 0.941J$
 - ▶ $h_{c3} = 4J$
- Divergenz der magnetischen Suszeptibilität bei krit. Feldern
- Grundzustand für $h > h_{c3}$:
 $|\uparrow_S \uparrow_T\rangle, |\uparrow_S \downarrow_T\rangle, |\downarrow_S \uparrow_T\rangle, |\downarrow_S \downarrow_T\rangle$

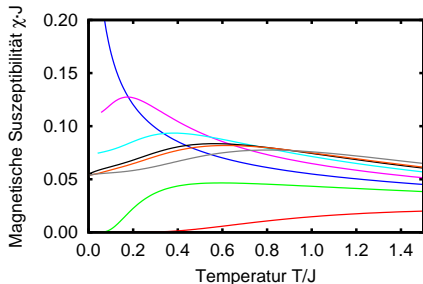
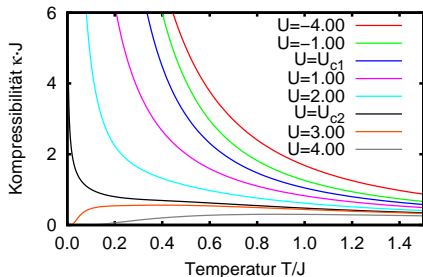
Essler-Korepin-Schoutens-Modell bei halber Füllung



Betrachte chemisches Potential und Hubbard-Parameter:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu \mathcal{N} + U \sum_j (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2)$
- Basis-Vektoren: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$
- **Feste Dichte $n(\mu) = 1.0$**
- Kritische Hubbard-Parameter:
 - ▶ $U_{c1} = 0J$
 - ▶ $U_{c2} = 4J \ln 2 \approx 2.77J$

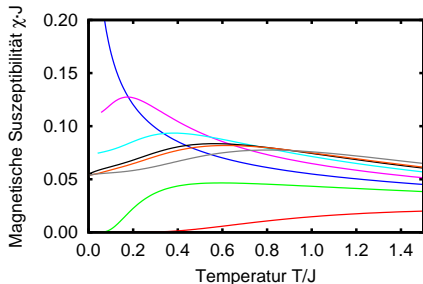
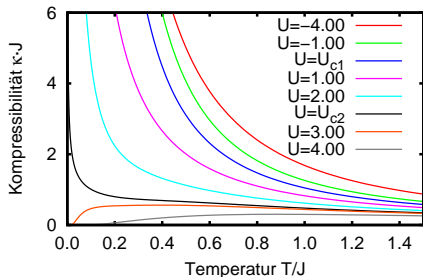
Essler-Korepin-Schoutens-Modell bei halber Füllung



Betrachte chemisches Potential und Hubbard-Parameter:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu \mathcal{N} + U \sum_j (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2)$
- Basis-Vektoren: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$
- Feste Dichte $n(\mu) = 1.0$
- Kritische Hubbard-Parameter:
 - ▶ $U_{c1} = 0J$
 - ▶ $U_{c2} = 4J \ln 2 \approx 2.77J$
- Grundzustand für $U < U_{c1}$:
 ~~$|\uparrow\rangle$~~ , ~~$|\downarrow\rangle$~~ , $|\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$

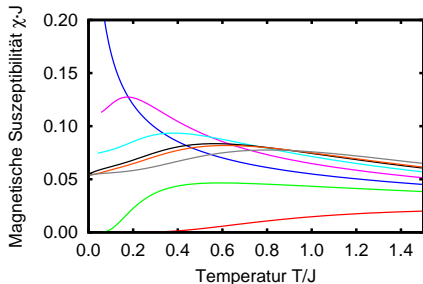
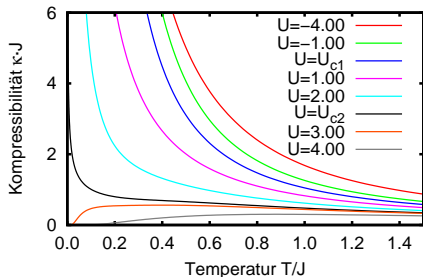
Essler-Korepin-Schoutens-Modell bei halber Füllung



Betrachte chemisches Potential und Hubbard-Parameter:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu \mathcal{N} + U \sum_j (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2)$
- Basis-Vektoren: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$
- Feste Dichte $n(\mu) = 1.0$
- Kritische Hubbard-Parameter:
 - ▶ $U_{c1} = 0J$
 - ▶ $U_{c2} = 4J \ln 2 \approx 2.77J$
- Grundzust. für $U_{c1} < U < U_{c2}$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$

Essler-Korepin-Schoutens-Modell bei halber Füllung



Betrachte chemisches Potential und Hubbard-Parameter:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu \mathcal{N} + U \sum_j (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2)$
- Basis-Vektoren: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$
- Feste Dichte $n(\mu) = 1.0$
- Kritische Hubbard-Parameter:
 - ▶ $U_{c1} = 0J$
 - ▶ $U_{c2} = 4J \ln 2 \approx 2.77J$
- Grundzustand für $U > U_{c2}$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |0\rangle$

- Zusammenfassung
 - ▶ Nichtlineare Integralgleichungen hervorragend geeignet für die Berechnung der Thermodynamik des Uimin-Sutherland-Modells
 - ▶ Bekannt für die meisten Anwendungen ($q \leq 4$ & alle Graduierungen)
 - ▶ Neue Anwendungen: $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell, EKS-Modell

- Zusammenfassung
 - ▶ Nichtlineare Integralgleichungen hervorragend geeignet für die Berechnung der Thermodynamik des Uimin-Sutherland-Modells
 - ▶ Bekannt für die meisten Anwendungen ($q \leq 4$ & alle Graduierungen)
 - ▶ Neue Anwendungen: $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell, EKS-Modell
- Offene Fragen
 - ▶ Keine allgemeine Konstruktion der nötigen Hilfsfunktionen
 - ▶ Unverstandene Struktur der Kernmatrix
 - ▶ Berechnung von Korrelationslängen (und -funktionen?)

- Zusammenfassung
 - ▶ Nichtlineare Integralgleichungen hervorragend geeignet für die Berechnung der Thermodynamik des Uimin-Sutherland-Modells
 - ▶ Bekannt für die meisten Anwendungen ($q \leq 4$ & alle Graduierungen)
 - ▶ Neue Anwendungen: $SU(4)$ Spin-Orbital-Modell, EKS-Modell
- Offene Fragen
 - ▶ Keine allgemeine Konstruktion der nötigen Hilfsfunktionen
 - ▶ Unverstandene Struktur der Kernmatrix
 - ▶ Berechnung von Korrelationslängen (und -funktionen?)
- Danke
 - ▶ A. Klümper, F. Göhmann, J. Suzuki
 - ▶ Allen Mitarbeitern des Lehrstuhls und des Graduiertenkollegs

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & J \sum_{j=1}^L [(c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j+1,\uparrow} + c_{j,\uparrow} c_{j+1,\uparrow}^\dagger)(1 - n_{j,\downarrow} - n_{j+1,\downarrow}) \\
 & + (c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j+1,\downarrow} + c_{j,\downarrow} c_{j+1,\downarrow}^\dagger)(1 - n_{j,\uparrow} - n_{j+1,\uparrow}) \\
 & + (n_j - 1)(n_{j+1} - 1)/2 - (n_{j,\uparrow} - n_{j,\downarrow})(n_{j+1,\uparrow} - n_{j+1,\downarrow})/2 \\
 & + c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j+1,\downarrow} c_{j+1,\uparrow} + c_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow} c_{j+1,\downarrow}^\dagger c_{j+1,\uparrow}^\dagger \\
 & - c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j+1,\uparrow} c_{j+1,\downarrow} - c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j+1,\downarrow} c_{j+1,\uparrow} \\
 & + (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2) + (n_{j+1,\uparrow} - 1/2)(n_{j+1,\downarrow} - 1/2)] \\
 & + U \sum_{j=1}^L (n_{j,\uparrow} - 1/2)(n_{j,\downarrow} - 1/2) - \mu \mathcal{N}
 \end{aligned}$$

Exaktes Abschneiden der TBA-Gleichungen

Anhang

- Führe modifizierte Hilfsfunktionen $b_{m,j}^{(a)}(x)$ ein (für festes m).
- Zusammenhang mit Hilfsfunktionen des TBA-Zugangs:

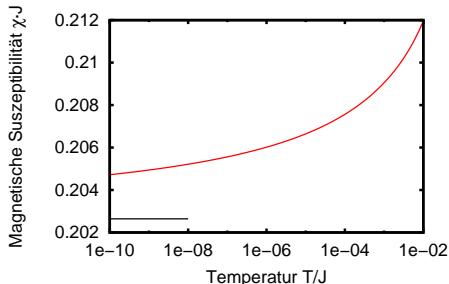
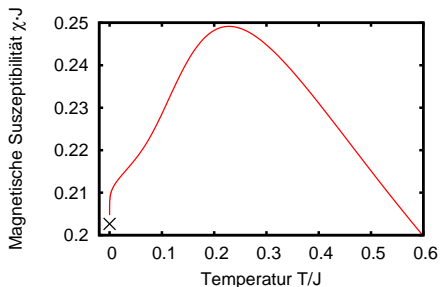
$$Y_m^{(a)}(x) = \prod_{j=1}^{d_a} B_{m,j}^{(a)}(x).$$

- Satz von Hilfsfunktionen $y_k^{(a)}(x)$ mit $k < m$ und $b_{m,j}^{(a)}(x)$ führt auf geschlossene nichtlineare Integralgleichungen.
- Gleichungen für $y_k^{(a)}(x)$ entsprechen TBA-Zugang.
- Gleichungen für $b_{m,j}^{(a)}(x)$ ähneln dem Fall $m = 1$:

$$\ln b_{m,j}^{(a)} = -\beta c_j^{(a)} + \sum_b \left\{ \left[A^{(a,b)} * \ln Y_{m-1}^{(b)} \right] (x) - \sum_l \left[\mathbf{K}_{j,l}^{(a,b)} * \ln B_{m,l}^{(b)} \right] (x) \right\}.$$

$SU(4)$ Spin-Orbital-Modell bei $g_S = 1$, $g_T = 0$

Anhang



Magnetische Suszeptibilität
bei Magnetfeld $h = 0$:

- Grundzustandswert bekannt aus konformer Feldtheorie:
 $\chi(0) \cdot J = 2/\pi^2 \approx 0.2026$
- Bei $T/J = 10^{-10}$ noch deutlich über diesem Wert
- Unendliche Steigung bei $T/J = 0$ durch logarithmische Korrekturen